எந்திரவியல் -I

தங்கராசு (கு)

//FULL BOOK//

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—416

எந்திரவியல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

க. தங்கராசு, எம். எஸ்ஸி.,

இயற்பியல் துணைப் பேராசிரியர்,

மாநிலக் கல்லூரி,

சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

irst Edition—February 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 416

© Tamil Nadu Text Book Society

MECHANICS

K. THANGARAJU

Price Rs. 8-15

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
WELDUN PRESS,
7/1, Mannappa Mudali Street,
Washermanpet, Madras-21.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி - உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'எந்திரவியல்'** என்ற இந்நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **416**ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க்குழுவின் சார்பில் வெளியான **35** நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை **451** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் என் மனங் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

பொருளடக்கம்

பக்கம்

I. கணிதவியல் அறிமுகம் (Mathematical Introduction) ... 1

முன்னுரை—வெக்டார் கூட்டல்—வெக்டார் கழித்தல்—வெக்டார் பகுப்பும் கூறுகளும்—அலகு வெக்டார்கள்—வெக்டார்—பெருக்கல்கள்—ஸ்கேலார் பெருக்கல் அல்லது புள்ளிப் பெருக்கல்—வெக்டார் பெருக்கல் அல்லது குறுக்குப் பெருக்கல்—வெக்டார் அளவுகளின் முக்கியத்துவம்—சில எளிய பயிற்சிகள்—வெக்டார் பகுதியாக்கம்—வெக்டார் தொகுதியாக்கம்—கோட்டுத் தொகுப்பு—பரப்புத் தொகுப்பு—பருமத் தொகுப்பு—வெக்டார் வாட்டம்—வெக்டார் விரிவு—வெக்டார் சுழிவு—செயற்குறி அல்லது செயலி ▽ —சில எளிய பயிற்சிகள்—காஸ் தேற்றம்—ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம்—கிரீன் தேற்றம்—ஒரு தளத்தில் கிரீன் தேற்றம்—பொது நேர்குத்து ஆயங்கள்—கோளப் போலார் ஆயங்கள்—உருளை ஆயங்கள்—ஆயங்களின் மாற்றம்—வினை பயன்கள்—உருளை ஆயங்களில் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றுக்கான சமன்பாடுகள்—சில எளிய பயிற்சிகள்.

II. இயக்கவியல் (Dynamics) ... 83

பரிமாணங்கள்—அலகுகள்—சார்புத் திசைவேகம்—புவியீர்ப்பு விசையால் நிகழும் இயக்கம்—மீ விரைவு இறக்கக்கோடு — எறிபொருள்கள் — எறிபொருள் அடையும் பெரும உயரம், அதன் பறத்தல் காலம் முதலியன காணல்—எறி புள்ளியின் வழியே செல்லும் சாய்தளத்தில் நெடுக்கம் — எறிபொருளின் பாதை ஒரு பரவளையம்—பயிற்சிகள்—கணத்தாக்கு—மோதல்—மோதலின்போது உந்தம் மாறுத்தன்மை—நிலையான தளத்தின்மீது மோதல் — இரு கோளங்களிடையே மோதல்—மோதலின்போது இயக்க ஆற்றல் இழப்பு—ஹோடோகிராஃப்—வட்ட இயக்கம்—கூம்பு ஊசல்—பயிற்சிகள்—சீரியல்பான இயக்கம்—ஒரே நேர்கோட்டில் இரு சீரியல்பான இயக்கங்களின் தொகுபயன்—ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்துக் கோடுகளில் அமைந்த

இரு சீரியல்பான இயக்கங்களின் தொகுபயன்—எடையற்ற சுருள் வில்லின் செங்குத்து அலைவுகள்—நிலைமத் திருப்புதிறன்—சில எளிய பொருள்களின் நிலைமத் திருப்புதிறன்கள்—இணை அச்சுக் கோடுகள் தேற்றம்—நேர்குத்தச்சுக் கோடுகள் தேற்றம்—உருளை, கோள ஓடு ஆகியவற்றின் நிலைமத் திருப்புதிறன்கள்—பயிற்சிகள்—கோணத் திசைவேகம்—சுழற்சி இயக்கச் சமன்பாடுகள்—திசைவேகமும் கோணத் திசைவேகமும்—கோண உந்தம்—சுழற்சியின் இயக்க ஆற்றல்—சாய்தளத்தில் உருண்டு வரும் பந்தின் முடுக்கம்—விசையாட் சுழலியின் நிலைமத் திருப்புதிறன்—கூட்டு ஊசல்—சட்ட ஊசல்—பயிற்சிகள்—கோண உந்த அழிவின்மை—பம்பரச் சுழற்சி—ஜைராஸ்டாட்—ஜைராஸ்கோப்—நிறை மையம்—திண்பொருட்களின் நிறை மையம்—நிறை மையத்தின் இயக்கம்—இடைச்செயலுடைய இரு பொருட்களின் இயக்கம்—இடைச்செயலுடைய இரு பொருட்களின் இயக்க ஆற்றல் முதலியன—பயிற்சிகள்.

III. நிலையியல் (Statics) ... 21

ஒரு துகளின் சமநிலை—துகள் தொகுதியொன்றின் சமநிலை—ஒரு கோட்டைப் பொறுத்து வெக்டாரின் திருப்புதிறன்—சமனத் தொகுதிகள்—இரட்டைகள்—செயல் அல்லது பணி—மாயப்பணி—நிலையான தளத்திற்கிணையாகத் திண் பொருளின் சிறு இடப்பெயர்ச்சிகள்—நிலையான தளத்திற்கிணையாக நகரக் கூடிய திண் பொருளின் சமநிலைக்கான போதுமான நிபந்தனைகள்—பயிற்சிகள்—புவியீர்ப்பு மையம்—வட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம்—வட்ட ஆரப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம்—வட்ட வில் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம்—அரைக்கோளத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்—உள்ளீடற்ற அரைக்கோளக் கூட்டின் புவியீர்ப்பு மையம்—நேர்வட்டக் கூம்புத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்—நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம்—பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம்—பயிற்சிகள்—உராய்வு—உராய்வு எண், உராய்வுக் கோணம், உராய்வுக் கூம்பு—சாய்தளத்தில் பொருளின் சமநிலை—சாய்தளத்தில் பொருளின் சமநிலை—தளத்திற்கிணையான விசை—சாய்தளத்திற்கு θ கோணத்தில் செயல்படும் விசை—உராய்வுக்கிளட்சு—

பக்கம்

நல்ல தராசுக்குத் தேவையான பண்புகள்—பொய்த் தராசின் துணைகொண்டு சரியான எடை காணும் முறை—போர்டா முறை—பொய்த் தராசைக் கொண்டு பொருளின் சரியான எடை காணல்—காஸ் முறை—பயிற்சிகள்.

IV. பாய்பொருள் நிலையியல் (Hydro Statics) ... 287

முன்னுரை—பாய்பொருள்—அழுத்தம்—அழுத்த மையம்—செவ்வகப் பரப்பின் அழுத்த மையம்—முக்கோணப் பரப்பின் அழுத்தமையம் (i)—முக்கோணப் பரப்பின் அழுத்த மையம் (ii)—பொதுத் திரவமானி—மிதக்கும் பொருட்களின் நிலைப்பாடு—மிதவைக் காப்பு மையம்—மிதக்கும் பொருளின் நிலைப்பாட்டிற்கான நிபந்தனை—ஒரு கப்பலின் மிதவைக் காப்புயரம் காணல்—பயிற்சிகள்—வளியமுத்தம்—வளியழுத்தங்களைக் கொண்டு உயரங்களைக் கணக்கிடுதல்—ஓரியல் வளிமண்டல உயரம்—ஸ்பிரெஞ்சல் பாதரசப் பம்பு—டோப்ளர் பம்பு—மூலக்கூறு பம்புகள்—விரவல் பம்புகள்—மக்லியாடு அளவி—நட்சன் அளவி—பயிற்சிகள்.

V. பாய்பொருள் இயக்கவியல் (Hydro dynamics) ... 326

பாய்பொருள் இயக்கம்—வரிச்சீரியக்கம்—தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு—ஆய்லர் சமன்பாடு—பெர்னேலி தேற்றம்—தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு—விளக்கம்—டாரிசெல்லி தேற்றம்—வெஞ்சுரி மீட்டர்—பெர்னேலி சமன்பாட்டின் விளை பயன்கள்—பயிற்சிகள்.

இணைப்புகள் :

1. M. K. S. அலகுகள்; பரிமாணங்கள் ... 350
2. C.G.S., M.K.S. அலகுகளின் தொடர்பு ... 351
3. நேர்கோட்டியக்கம், சுழற்சி இயக்கம் : ஒப்புமை ... 352
4. நிலைமத் திருப்புதிறன்கள் ... 353
5. புவியீர்ப்பு மையங்கள் ... 354
6. விடைகள் ... 355

மேற்கோள் நூற்கள் ... 361

கலைச்சொற்கள் ... 362

பிரிவு I

கணிதவியல் அறிமுகம்

(Mathematical Introduction)

1. முன்னுரை

எந்திரவியலில் பயிலுகின்ற பல்வேறு தேற்றங்களும், அவற்றின் உரைகளும், அவற்றை மெய்ப்பிக்கும் முறைகளும் இயல்பியல் அளவுகளை 'வெக்டார்' (Vector) வாயிலாகக் குறிப்பிடும்போது மிகவும் எளியனவாகத் தோன்றுகின்றன. 'வெக்டார்' என்பது எண் மதிப்பு (magnitude) மட்டுமன்றிக் குறிப்பிட்ட திசையை (direction) யும் உடைய ஓர் இயல்பியல் அளவாகும். அவ்வாறன்றி, வெறும் எண்மதிப்பினை மட்டும் கொண்டுள்ள இயல்பியல் அளவுகளை 'ஸ்கேலார்' (Scalar) அளவுகள் என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக விசை (force), திசைவேகம் (velocity), மின்புல வலிமை (electric field strength), காந்தத் தூண்டல் (magnetic induction) முதலியவை எண்மதிப்பு மட்டுமன்றித் திசையையும் குறிப்பிட வேண்டிய இயல்பியல் அளவுகளாதலால், அவை வெக்டார் அளவுகளாகும். மாறாக, நீளம் (length), நிறை (mass), காலம்(time), வேகம்(speed), ஆற்றல் (energy) முதலியவை வெறும் எண்மதிப்பினை மட்டும் கொண்ட இயல்பியல் அளவுகளாதலால் அவை ஸ்கேலார் அளவுகளாகும்.

படம் 1

ஒரு துகள் (particle) A என்ற புள்ளியிலிருந்து நகர்ந்து B என்ற புள்ளியை அடைந்தால், அத் துகள் அடைந்த இடப்பெயர்ச்சியைப் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு A-யிலிருந்து B-க்கு வரையப்

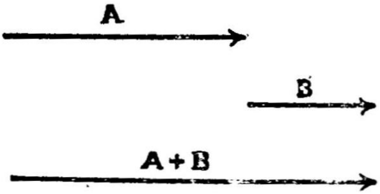
பட்ட ஒரு நேர்கோட்டால் குறிக்கலாம். அம்புக்குறி துகள் நகர்ந்த திசையைக் காட்டுகிறது. துகளின் தொடக்க நிலையையும் இறுதி நிலையையும் மட்டுமே குறிக்கும் AB என்ற இந்தக் கோட்டினை இடப்பெயர்ச்சி (Displacement) வெக்டார் எனக் கூறுகிறோம். AB என்ற கோடு இயக்கத்தின் விளைவை மட்டும் குறிக்கிறதே யன்றி, இயக்கம் நிகழ்ந்த பாதையைக் குறிப்பதில்லை. படத்தில் AB என்ற கோட்டின் நீளம் இடப்பெயர்ச்சியின் எண் மதிப்பையும், அம்புக்குறி திசையையுங் குறிப்பிடுகின்றன.

எனவே, வெக்டார் அளவுகளைப் படத்தில் வரையும்போது பின்வருவனவற்றை நினைவில் கொள்ள வேண்டும்: (i) வரையும் வெக்டாரின் நீளம் எண்மதிப்பினைக் குறிப்பிட வேண்டும். (ii) அம்புக்குறி திசையைக் காட்ட வேண்டும்.

எழுதும்போது படம் 1-ல் உள்ள வெக்டாரை $\overrightarrow{AB}$ என எழுதலாம். $\overrightarrow{BA}$ என எழுதினோமானால் அதே நீளமுள்ள, ஆனால் எதிர்த் திசையிலுள்ள வெக்டாரைக் குறிக்கும்.

2. வெக்டார் கூட்டல் (Vector Addition):

படத்தில் $\vec{A}$, $\vec{B}$ என்ற இரு வெக்டார்கள் காட்டப்



படம் 2

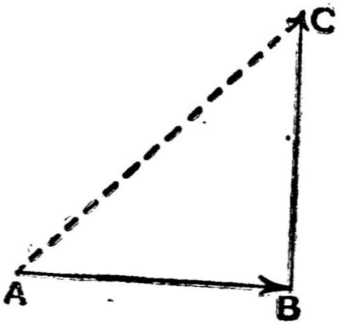
பட்டுள்ளன. இரண்டும் ஒரே திசையில் உள்ளன. இவ்வாறிருந்தால் இரு வெக்டார்.

இப்போது $\overrightarrow{AB}$ என்பது ஓர் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம். B-யிலிருந்து இன்னொரு இடப்பெயர்ச்சியை $\overrightarrow{BC}$ குறிக்கட்டும் (படம் 3). இந்த இரு இடப்பெயர்ச்சிகளின் மொத்த விளைவு AC என்ற இடப்பெயர்ச்சியால் உண்டாகும் விளைவுக்குச்

சமம். எனவே, $\overrightarrow{AC}$ என்பது $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகையை அல்லது தொகுபயனைக் குறிக்கும். எனவே, வெக்டார் கூட்டலைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்;

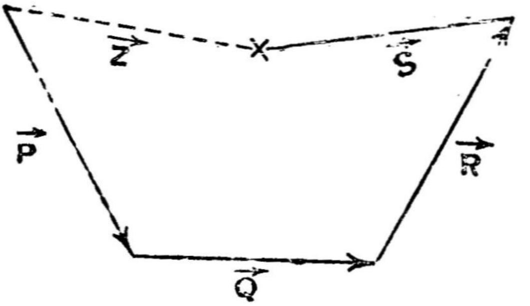
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad (2\cdot 1)$$

முதல் இரு இடப்பெயர்ச்சிகளின் தொகுபயன் (Resultant) மூன்றாவது இடப்பெயர்ச்சிக்குச் சமம்.



படம் 3

இதே முறையில் ஒரு துகள் அடுத்தடுத்து $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ முதலிய



படம் 4

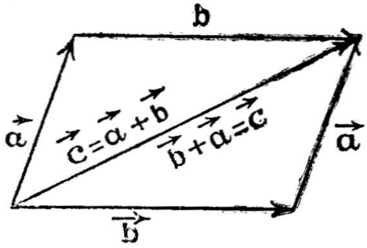
இடப்பெயர்ச்சிகளைப் பெற்றிருந்தால் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{S} = \vec{Z} \text{ ஆகும்.}$$

வெக்டார் கூட்டல் பண்புகள் :

இனி வரும் பகுதிகளில் அம்புக்குறி இல்லாவிடினும், பெரிய எழுத்துகளால் குறிக்கப்படும் அளவுகளை வெக்டார் அளவுகளெனக் கொள்வோம்.

A,B என்ற இரு வெக்டார்களின் கூட்டுத்தொகை C என்போம். முதலில் A-யுடன் B ஐக் கூட்டி C கிடைப்பதைக் காட்டியுள்ளோம். இரண்டாவதாக, B-யுடன் A-ஐக் கூட்டியுள்ளோம். படத்திலிருந்து (படம் 5) இரு கூட்டுத்தொகைகளும் சமமென்பது தெளிவு.



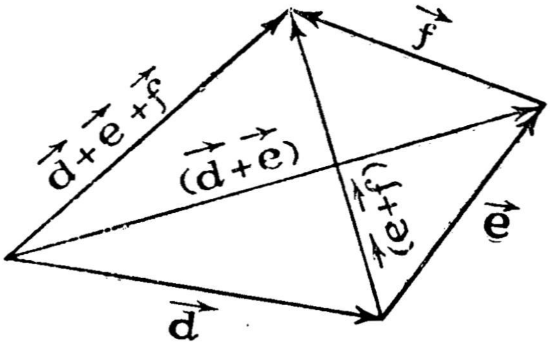
படம் 5

எனவே,

$$A+B = B+A \qquad (2\cdot2)$$

இதனைக் கூட்டலின் **இடமாற்றப் பண்பு (Commutative property of addition)** எனலாம்.

இப்போது D, E, F என்ற மூன்று வெக்டார்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காணலாம் (படம் 6). முதலில் D, E ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்கிறோம். பின்னர், அக் கூட்டுத்



படம் 6

தொகையுடன் F ஐக் கூட்டி (D+E)+F பெறுகிறோம். மற்றோர் முறையில் முதலில் E, F ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டு அதனை D-உடன் கூட்டினால் D + (E + F) கிடைக்கும். படத்திலிருந்து

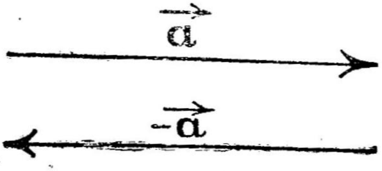
$$(D+E) + F = D + (E+F) \qquad (2\cdot3)$$

என்பது தெளிவு. இத் தன்மையைக் கூட்டலின் **சேர்க்கைப்பண்பு (Associative Property)** என்கிறோம்.

இவ்விரு பண்புகளும் சாதாரண இயற்கணிதத்தில் இருப்பன போன்றவையே.

3. வெக்டார் கழித்தல் (Subtraction of Vectors)

'—A' என்ற வெக்டார் A-ன் எண்மதிப்புக் கொண்ட ஆனால் அதற்கு எதிரான திசையைக் கொண்ட வெக்டாராகும்

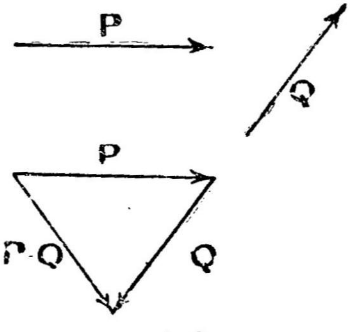


படம் 7

(படம் 7). ஆதலால், ஒரு வெக்டாரின் திசையை மட்டும் மாற்றினால் கிடைக்கும் வெக்டார் எதிர்க்குறி யுடையதாக இருக்கும். எனவே, P என்ற வெக்டாரிலிருந்து Q என்ற வெக்டாரைக் கழிக்க வேண்டுமானால், இதனை (P—Q) என எழுதலாம். ஆனால்,

$$P - Q = P + (-Q) \tag{3·1}$$

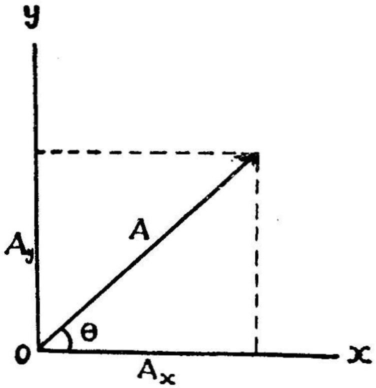
ஆதலால், P-யிலிருந்து Q-வைக் கழிப்பதும் P-யுடன் (—Q) வைக் கூட்டுவதும் ஒரே விளைவைத் தோற்றுவிக்கின்றன. எனவே, வெக்டார் கழித்தல் என்பதை வெக்டார் கூட்டலின் ஒரு வகையாகவே கொள்கிறோம் (படம் 8). இவ்வகை வெக்டார் கழித்தல்களை விளக்குகிறது.



படம் 8

4. வெக்டார் பகுப்பும், கூறுகளும் (Resolution and Components of Vectors)

முற்பகுதிகளில் கூறியதுபோல், வரைபட முறையில் ஒரு தள (Coplanar) வெக்டார்களைக் கூட்டவோ, கழிக்கவோ இயலுமெனினும், முப்பரிமாண (Three dimensional) வெக்டார்களை அவ்வாறு கூட்டுவதும், கழிப்பதும் எளிதானதல்ல. ஆதலால், நாம் பொதுவாக வெக்டார்களை மூன்று ஆயக்கோடுகளுக்கு இணையான கூறுகளாகப் பிரித்துப், பின்னர் இயற்கணித முறையில் அவைகளைக் கூட்டுகிறோம்.



படம் 9

இப்போது x, y தளத்தில் உள்ள A என்ற வெக்டாரைக் காண்போம் (படம் 9). இதன் திசை X அச்சுக்கோட்டுடன் θ கோணத்தை ஏற்படுத்தினால், X அச்சுக் கோட்டிற்கு இணையாக A-யின் கூறு $A \cos\theta$ ஆகும். இதனை A_x எனக் குறித்தோமானால்,

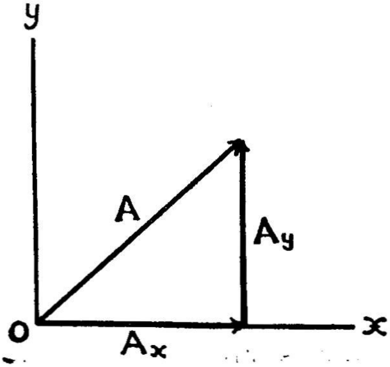
$$A_x = A \cos\theta \qquad (4{\cdot}1)$$

அதே போல, Y-அச்சுக்கோட்டிற்கு இணையாக A-ன் கூற்றை A எனக் குறித்தால்,

$$A_y = A \sin\theta \text{ ஆகும்.} \qquad (4{\cdot}2)$$

θ-வின் மதிப்பைப் பொறுத்து A_x, A_y என்பன முறையே X, Y ஆகிய அச்சுக் கோடுகளின் திசையிலோ அவற்றிற்கு எதிர்த் திசையிலோ இருக்கலாம்.

வெக்டார் கூட்டல் விதிப்படி படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் A_x, A_y ஆகிய வெக்டார்களைக் கூட்டினால் A என்ற வெக்டார் கிடைக்கும்.



படம் 10

எனவே,

$$\mathbf{A} = \mathrm{A}_x + \mathrm{A}_y \tag{4·3}$$

a, a_x, a_y என்பன முறையே A, A_x, A_y என்ற வெக்டார்களின் எண் மதிப்புகளை மட்டும் குறித்தால்,

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \tag{4·4}$$

என்பது தெளிவு.

$$\text{மேலும்,} \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \text{ ஆகும்.} \tag{4·5}$$

இவ்வாறு வெக்டார் கூட்டல் செய்யும்போது பின்வரும் விதி பயனுள்ளது: குறிப்பிட்ட ஒரு திசையில் பல வெக்டார்களின் தொகுபயனின் கூறு அதே திசையில் அந்த வெக்டார்களின் கூறுகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

இவ் விதிப்படி, x-திசையில் A_x, B_x, C_x . . . . என்பன முறையே A, B, C, ... ஆகிய வெக்டார்களின் கூறுகளானால், R_x என்பது அவ் வெக்டார்களின் தொகுபயன் R-ன் x கூறு ஆனால்,

$$\mathrm{R}_x = \mathrm{A}_x + \mathrm{B}_x + \mathrm{C}_x + \ldots\ldots \text{ ஆம்} \tag{4·6}$$

இதே போல

$$\mathrm{R}_y = \mathrm{A}_y + \mathrm{B}_y + \mathrm{C}_y + \ldots\ldots \text{ ஆம்} \tag{4·7}$$

$$\mathrm{R}_z = \mathrm{A}_z + \mathrm{B}_z + \mathrm{C}_z + \ldots\ldots \text{ ஆம்} \tag{4·8}$$

இவ்வாறு A, B, C . . . . ஆகியவற்றின் x, y, z கூறுகளைக் காண்பதன் மூலம், R_x, R_y, R_z என்பனவற்றை அறியலாம். பின்னர், சமன்பாடு (4·3)-ன் படி

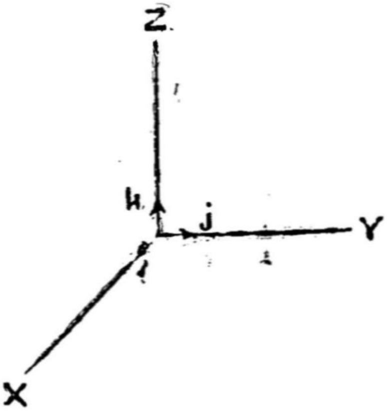
$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_x + \mathrm{R}_y + \mathrm{R}_z \text{ ஆகும்.} \tag{4·9}$$

இச் சமன்பாட்டின் எல்லா உறுப்புகளும் வெக்டார்களாகும்.

5. அலகு வெக்டார்கள் (Unit Vectors)

A என்ற வெக்டாரின் எண் மதிப்பு a ஆனால், $\frac{\mathbf{A}}{a}$ என்பது அலகு எண்மதிப்புள்ளதும் A-யின் திசையில் உள்ளதுமான ஒரு வெக்டார் ஆகும். இதனை A-யின் திசையில் அலகு வெக்டார் என்கிறோம்.

இதே போன்று x-ன் திசையில் $\vec{i}$ என்பதை அலகு வெக்டாராகவும், y-ன் திசையில் $\vec{j}$ என்பதை அலகு வெக்டாராகவும் z-ன் திசையில் $\vec{k}$ என்பதை அலகு வெக்டாராகவும் கொள்வது வழக்கம் (படம் 11). எனவே, x-ன் திசையில் உள்ள A_x என்ற வெக்டாரின் எண் மதிப்பு a_x ஆக இருந்தால்,



படம் 11

$A_x = a_x \vec{i}$ ஆகும்.

அதேபோல் $A_y = a_y \vec{j}$

$A_z = a_z \vec{k}$ ஆம். (5·1)

எனவே, $A = A_x + A_y + A_z$ ஆதலால்,

$A = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ஆம் (5.2)

மேலும், A-யின் எண்மதிப்பு a ஆனால்,

$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ ஆகும். (5·3)

6. வெக்டார் — பெருக்கல்கள் (Multiplication of Vectors):

வெக்டார் கூட்டல், வெக்டார் கழித்தல் ஆகியவற்றில் பயன் படுத்தப்படும் வெக்டார்கள் ஒரே இயல்பியல் தன்மை (Physical) Property) படைத்தவைகளாக இருக்க வேண்டும். அதாவது,இடப் பெயர்ச்சியைக் குறிக்கும் வெக்டார் ஒன்றுடன் மற்றொன்று இடப் பெயர்ச்சியைக் குறிக்கும் வெக்டாரைத்தான் கூட்ட இயலும். பெறுகின்ற தொகுபயன் வெக்டாரும் அதே இடப்பெயர்ச்சியைத் தான் குறிக்கும். இது சாதாரணக் கூட்டல், கழித்தல் விதிகளைப் போன்றதே. ஏனெனில், இரு வேறு இயல்பியல் அளவுகளை நாம் கூட்டுவதோ கழிப்பதோ பொருந்தாது என அறிவோம். காட்டாக, ஒரு நிறையுடன் மற்றொரு நிறையைத்தான் கூட்டலாம் அல்லது கழிக்கலாம்; வெப்ப நிலையை அல்லது நேரத்தை, நிறை யுடன் கூட்டுவதில்லை.

ஆனால், பெருக்கல் விதி அவ்வாறில்லை. பெருக்கல் செய்யும் போது இருவேறு தன்மையுள்ள இயல்பியல் அளவுகளைப் பெருக்கி, மூன்றாவதோர் இயல்பியல் அளவினைப் பெறலாம். காட்டாக, வேகத்தையும் காலத்தையும் பெருக்கினால் தொலைவு கிடைக்கும். இதே முறையில்தான் வெக்டார் பெருக்கல்களும் அமைகின்றன.

வெக்டார்களைப் பயன்படுத்தும்போது நமக்கு இயல்பியலில் பயன்தரக்கூடிய வண்ணம் மூன்று பொதுவான பிரிவுகளாகப் பெருக்கலைப் பிரிக்கலாம்:

(i) ஒரு ஸ்கேலார், ஒரு வெக்டார் ஆகியவற்றின் பெருக்கல்.

(ii) ஒரு ஸ்கேலாரைப் பெருக்குத் தொகையாகத் தரக்கூடிய விதத்தில் இரு வெக்டார்களைப் பெருக்குதல்.

(iii) ஒரு வெக்டாரைப் பெருக்குத் தொகையாகத் தரும் வண்ணம் இரு வெக்டார்களைப் பெருக்குதல்.

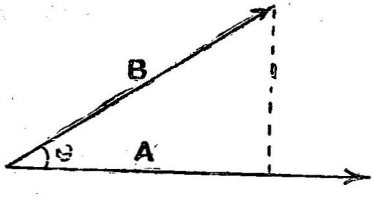
இந்த மூன்று விதமான பெருக்கல்களின் விதிகளை நாம் பின் வருமாறு அமைத்துக்கொள்கிறோம் :

ஒரு வெக்டாரை ஸ்கேலாரால் பெருக்குவது என்பது மிகவும் எளிமையான பொருள் கொண்டது.

C என்ற ஸ்கேலாரால் A என்ற வெக்டாரைப் பெருக்கும்போது CA என்ற வெக்டார் கிடைக்கும். இப் புதிய வெக்டாரின் கூறுகள் A-ன் ஒத்த கூறுகளைப்போல் ஒவ்வொன்றும் C மடங்குள்ளவையாகும். அதாவது, புதிய வெக்டாரின் எண்மதிப்பு A-யின் எண் மதிப்பைப்போல் C மடங்குள்ளதாக இருக்கும். C-நேர்க்குறி (+*ve*) உடையதாக இருந்தால், CA என்ற வெக்டார் A-ன் திசையைக் கொண்டதாகவும், C-எதிர்க்குறி (−*ve*) உடையதாக இருந்தால் CA என்ற வெக்டார் A-ன் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் உள்ளதாகவும் இருக்கும். ஆதலால், ஸ்கேலாரால் வெக்டாரைப் பெருக்கும்போது, (i) கிடைக்கும் வெக்டாரின் எண் மதிப்பு மாறும்; (ii) கிடைக்கும் வெக்டாரின் திசை எடுத்துக்கொண்ட வெக்டாரின் திசையாகவோ, அதற்கு நேர் எதிர்த்திசையாகவோ இருக்கும்.

ஒரு வெக்டாரை இன்னொரு வெக்டாரால் இரு வகைகளில் பெருக்கலாம். முதலாவது வகை **ஸ்கேலார் பெருக்கல்** அல்லது புள்ளிப் பெருக்கல் (Scalar product or Dot product) எனப்படும். இரண்டாவது வகைப் பெருக்கல் **வெக்டார் பெருக்கல்** அல்லது குறுக்குப் பெருக்கல் (Vector product or Cross product) எனப்படும்.

7. ஸ்கேலார் பெருக்கல் அல்லது புள்ளிப் பெருக்கல் :



படம் 12

இரு வெக்டார்களின் ஸ்கேலார் பெருக்கல் என்பது ஒன்றின் எண்மதிப்பையும், அதன் திசையில் மற்றொன்றின் எண்மதிப்பின் கூற்றினையும் பெருக்கும் போது கிடைக்கும் பெருக்கற் பலனுக்குச் சமமாகும். A, B என்ற இரு வெக்டார்களின் ஸ்கேலார்பெருக்கலை A · B எனக் குறிப்போம். இதனைப் புள்ளிப் பெருக்கல் எனவும் கூறுவது உண்டு. *a*, *b* என்பன முறையே A, B ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புகளானால்,

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = ab \cos \theta \qquad (7.1)$$

இதில் θ என்பது A, B ஆகியவற்றுக்கிடையேயுள்ள (சிறிய) கோணத்தைக் குறிக்கும். இச் சமன்பாட்டில் a என்பது A-ன் எண்மதிப்பையும் $b \cos \theta$ என்பது A-ன் திசையில் B-ன் கூறின் எண்மதிப்பையும் குறிப்பிடுகின்றன. a, b, θ ஆகியவை நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் ஆயக்கோடுகளைப் பொறுத்து மாறுவதில்லையாதலால், ஸ்கேலார் பெருக்கல் எந்த ஆயக்கோடுகள் தொகுதியாயிருப்பினும் ஒரே மதிப்பினை யுடையது.

சமன்பாடு (5.2)-லிருந்து

$$\mathrm{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_x \vec{k} \quad \text{ஆம்.} \qquad (7.2)$$

அதேபோல $$\mathrm{B} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \quad \text{ஆம்.} \qquad (7.3)$$

எனவே,

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_x \vec{k}) \qquad (7.4)$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ என்பன பொது நேர்க்குத்து ஆயக்கோடுகள் x, y, z ஆகியவற்றின் திசையில் முறையே அலகு வெக்டார்களாதலால், $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தாக உள்ளவையாகும். எனவே, வரையறைப்படி

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1 \qquad (7.5)$$

அதேபோல,

$$\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1 \qquad (7.6)$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=1\times1\times\cos 90=0 \qquad (7.7)$$

அதேபோல, $\vec{j}\cdot\vec{i}=1\times1\times\cos 90=0$ (7.8)

மேலும், $\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ (7.9)

$$\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0 \qquad (7.10)$$

(7.5)-லிருந்து (7.10) வரையுள்ள சமன்பாடுகளைக் கொண்டு (7.4) ஐ விரித்தெழுதினோமானால்,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \qquad (7.11)$$

எனக் காட்டலாம்.

மேற்கூறிய வகையில் ஸ்கேலார் பெருக்கலை வரையறுப்பதற்குக் காரணம், இதன்மூலம் சுருக்கமாக நாம் சில இயல்பியல் அளவுகளைக் குறிப்பிட இயலும் என்பதே.

F என்ற விசை செயல்படுவதால், ஒரு துகள் S என்ற இடப்பெயர்ச்சி யுறுவதாகக் கொள்வோம். இதனால் F என்ற விசை புரியும் பணி (Work) F . S ஆகும். வரையறைப்படி

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}=f\,s\cos\theta \qquad (7.12)$$

f - என்பது விசையின் எண்மதிப்பையும், s cos θ என்பது விசையின் திசையில் துகள் அடைந்தஇடப்பெயர்ச்சியையும் குறித்தலால், f s cos θ என்பது விசைபுரிந்த பணியைக் குறிக்கிறது.

இதே போன்று நிலையாற்றல் (Potential energy), மின்னழுத்தம் (Electric Potential), மின்திறன் (Electric power) ஆகியவற்றையும் ஸ்கேலார் பெருக்கல்களாகக் கூற இயலும்.

8. வெக்டார் பெருக்கல் அல்லது குறுக்குப் பெருக்கல்

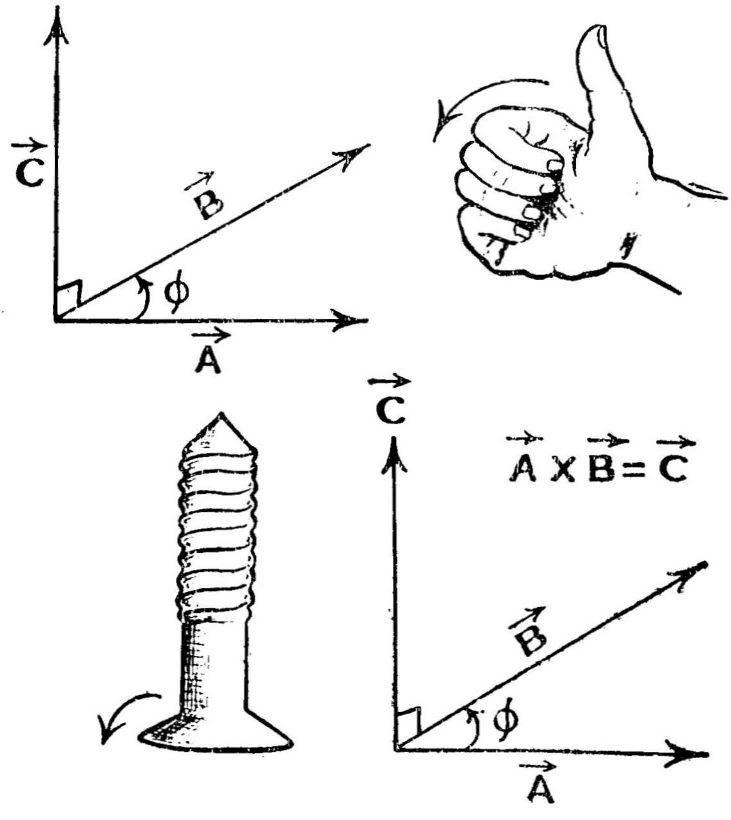
A, B என்ற இரு வெக்டார்களின் வெக்டார் பெருக்கலை **A×B** என எழுதுவோம். இதனைக் குறுக்குப் பெருக்கல் எனவும் கூறுவதுண்டு. இதனைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம் :

A × B என்ற வெக்டார் பெருக்கல் மற்றொரு வெக்டார் **C**-க்குச் சமமாகும். அதாவது **A × B = C** (8.1)

C-ன் எண்மதிப்பு $c = a\,b\sin\phi$ ஆகும். (8.2)

இதில் ϕ என்பது A, B ஆகியவற்றிற்கிடையே யுள்ள (சிறிய) கோணத்தைக் குறிக்கும்.

C-ன் திசை A, B ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள தளத்திற்கு நேர்க்குத்தாக இருக்கும். ஒரு தளத்திற்கு நேர்க்குத்தாக இரு எதிரெதிர்த் திசைகள் இருக்கலாமாதலால், C-ன் திசையைப் பின் வருமாறு காணலாம்:



படம் 13

முதல் முறையில் A-யை அதன் இடத்திலிருந்து B ஐ நோக்கித் திருப்புவதாகக் கொள்வோம். அதே திசையில் ஒரு வலம்புரித் திருகைத் (right - handed screw) திருப்பினால் அதன் முனை முன்னேறும் திசையே C-யின் திசையாகும். வேறொரு முறையிலும் C-யின் திசையைக் கண்டறியலாம், வலக்கைப் பெருவிரலை மட்டும் நேராக வைத்துக்கொண்டு மற்ற விரல்களை மடக்கிக்கொள்வோம். A-லிருந்து B-க்கு A-ஐச் சுழற்ற வேண்டிய திசையில் மற்ற

விரல்கள் இருக்குமாறு வலக்கையை வைத்துக் கொண்டால், பெரு விரல் காட்டும் திசையே C-ன் திசையாகும். இத் திசையில் $\vec{u}$ என்ற ஓர் அலகு வெக்டாரை எடுத்துக்கொள்வோமானால்,

$$A \times B = ab \sin \phi \, \vec{u} \qquad (8.3)$$

என எழுதலாம்.

மேற்கூறிய விளக்கத்தின்படி B × A யின் மதிப்பைக் காணலாம். B × A -ன் எண்மதிப்பு (b a sin ϕ) ஆதலால், A×B - ன் எண்மதிப்புக்குச் சமமாகும். ஆனால், B × A என்றவெக்டாரின் திசையை மேலே சொன்ன விதிப்படி காண்போமானால், அது A×B யின் திசைக்கு எதிர்த் திசையிலிருக்கக் காணலாம்.

எனவே, $$A \times B = -B \times A \qquad (8.4)$$

$\phi = 90°$ ஆக இருந்தால் A, B, C என்ற வெக்டார்கள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தான முப்பரிமாண வலம்புரி ஆயக் கோடுகள் தொகுதியைத் (Three dimensional right handed co-ordinate system) தருகின்றன.

இப்போது $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ என்ற அலகு வெக்டார்களைக் காண்போம். இதை ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தானவை ஆதலால் சமன்பாடு (8.3)-லிருந்து

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k}$$

$$= 1 \times 1 \times \sin 0 = 0 \text{ ஆகும்.} \qquad (8.5)$$

ஆனால், $\vec{i} \times \vec{j} = 1 \times 1 \times \sin 90 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ ஆகும்.

ஆனால், $\vec{u}$ என்பது $\vec{i}, \vec{j}$ ஆகியவற்றின் தளத்திற்கு நேர்க்குத்தாக உள்ள அலகு வெக்டாராதலால் $\vec{u} = \vec{k}$ ஆகும்.

எனவே, $$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \text{ ஆகும்.} \qquad (8.6)$$

அதேபோல், $$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \text{ ஆகும்.} \qquad (8.7)$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \text{ ஆகும்.} \qquad (8.8)$$

மேலும்

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$ என்பனவற்றையும் அறியலாம். (8.9)

இப்போது A×B -ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$A = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$
$$B = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

ஆதலால்,

$$A \times B = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$
$$= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k}$$
$$+ a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k}$$
$$+ a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k}$$

சமன்பாடுகள் (8.5) முதல் (8.9) வரை உள்ளவற்றைப் பயன் படுத்தினால்,

$$A \times B = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \quad (8.10)$$

இதனை

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (8.11)$$

எனவும் எழுதலாம்.

இவ்வாறு விரிவாக வெக்டார் பெருக்கலை நாம் வரையறுக்கக் காரணம், இவ்வகைப் பெருக்கல் இயல்பியலில் மிகவும் பயனுள்ளதென்பதே. வெக்டாரால் குறிக்கப்படக்கூடிய இரு இயல்பியல் அளவுகளைப் பெருக்கும்போது கிடைக்கும் வெக்டார் பொருள் பொதிந்ததாக இருக்கக் காண்கிறோம். இரட்டையின் திருப்புத் திறன், கோண உந்தம், காந்தப்புலத்தில் செல்லும் மின்னூட்டத் தின்மீது செயல்படும் விசை, மின்காந்த ஆற்றல் ஓட்டம் (flow of electro-magnetic energy) ஆகியவற்றை இவ்வகைப் பெருக்கலுக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகக் கூறலாம்

இதுவரை நாம் கண்ட மூவகைப் பெருக்கல்கள் அடிப்படைப் பெருக்கல் வகைகளைக் குறிப்பன. இப்போது மற்றும் இரு பயனுள்ள பெருக்கல் வகைகளைக் காண்போம்.

வெக்டார் மும்மைப் பெருக்கல் (Vector Triple Product) :

A, B என்ற இரு வெக்டார்களின் வெக்டார் பெருக்கல் மற்றொரு வெக்டாரைக் கொடுக்குமென அறிவோம். அதாவது,

$$A \times B = V \tag{8.12}$$

என எழுதலாம். இப்போது V என்ற வெக்டாரை C என்ற வேறொரு வெக்டாரால் $V \cdot C$ அல்லது $V \times C$ என்ற இரு வகைகளில் பெருக்கலாம்.

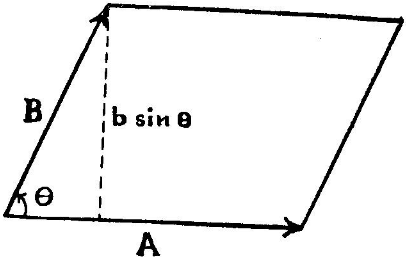
$$V \cdot C = (A \times B) \cdot C \tag{8.13}$$
$$V \times C = (A \times B) \times C \tag{8.14}$$

ஸ்கேலார் மும்மைப் பெருக்கல் (Scalar Triple Product) :

$(A \times B) \cdot C = V \cdot C$ என்பது ஒரு ஸ்கேலாரைக் கொடுக்குமாதலால், $(A \times B) \cdot C$ என்பதை ஒரு ஸ்கேலார் மும்மைப் பெருக்கல் என்கிறோம். A-க்கும் B-க்கும் இடையேயுள்ள கோணம் θ ஆனால்,

$$A \times B = ab \sin \theta \tag{8.15}$$

ஆகும். இதில் a, b என்பன முறையே A, B என்ற வெக்டார்களின் எண் மதிப்புக்களாகும். படத்திலிருந்து $(a)(b \sin \theta)$ என்பது A, B ஆகிய வெக்டார்களைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட ஓர் இணை



படம் 14

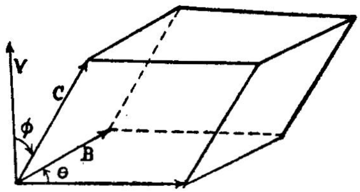
கரத்தின் பரப்பளவு என்பது தெளிவு.

இப்போது $A \times B \cdot C = V \cdot C$ ஆதலால்,

$$V \cdot C = vc \cos \phi \tag{8.16}$$

ஆகும். இதில் , c என்பன முறையே V, C என்ற வெக்டார்களின் எண்மதிப்புக்கள் . ϕ என்பது V-க்கும் C-க்கும் இடையுள்ள கோணம், மேலும், V-யின் திசை A, B ஆகிய

வற்றைக் கொண்டுள்ள தளத்துக்கு நேர்க்குத்தாக இருக்கும். சமன்பாடு (8.15)-லிருந்து $v = ab \sin\theta$ ஆதலால், இது படத்தில் காட்டப்பட்ட இணைமுகத் திண்மத்தின் (Paralellopiped) அடிப் பரப்புக்குச் சமமாகும். மேலும், (c cos ϕ) என்பது V -ன் திசையில் C - ன் கூறு (component) ஆகும். எனவே, c cos ϕ என்பது இணைமுகத் திண்மத்தின் நேர்க் குத்துயரத்தைக் குறிக்கும். ஆதலால்,



படம் 14 A

$$v\,c \cos\phi = (\text{அடிப்பரப்பு}) \times (\text{நேர்க்குத்துயரம்})$$

= இணைமுகத் திண்மத்தின் பருமன்.

எனவே, (A×B) · C என்பது இணைமுகத் திண்மத்தின் பருமனைக் குறிக்கிறது. இதேபோல இணைமுகத் திண்மத்தின் மற்றப் பக்கங்களை அடிப்பக்கங்களாகக் கொண்டு, இணைமுகத் திண்மத்தின் பருமன்

$$(A\times B)\cdot C = (B\times C)\cdot A = (C\times A)\cdot B \qquad (8.17)$$

எனக் காட்டலாம். பருமன் நேர்க்குறியுடையதாக இருக்க, **A, B, C** ஆகிய வெக்டார்களின் சுற்று வரிசையை (cyclic order) மாற்றக் கூடாது. மேலும், ஸ்கேலார் பெருக்கல் இடமாற்றப் பண்பு (commutative property) உடையதாதலால், சமன்பாடு (8.17)-ஐப் பின்வருமாறும் எழுதலாம் :

$$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) \qquad (8.18)$$

எனவே, (8.17), (8.18) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து ஸ்கேலார் மும்மைப் பெருக்கலில் புள்ளி (dot), பெருக்கல் குறி (cross) ஆகியவற்றின் இடமாற்றம் பெருக்கற்பலனை மாற்றுவதில்லையெனத் தெளிவாகிறது. எனவே, ஸ்கேலார் மும்மைப் பெருக்கலை [ABC] எனவும் (புள்ளி, பெருக்கல் குறி ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடாமல்) எழுதுவதுண்டு. [ABC] என்பது சமன்பாடுகள் (8.17), (8.18) ஆகியவற்றிலுள்ள ஆறு பெருக்கல்களில் ஏதேனுமொன்றைக் குறிக்கலாம்.

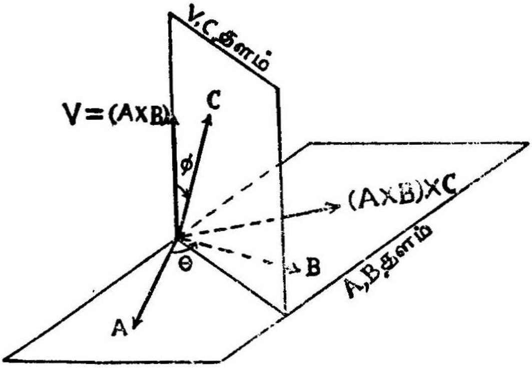
$$[ABC] = A \cdot (B \times C)$$

$$= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_x \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

வெக்டார் மும்மைப் பெருக்கல் (Vector Triple Product):

$V \times C = (A \times B) \times C$ என்பது ஒரு வெக்டாராதலால் இதனை வெக்டார் மும்மைப் பெருக்கலென்கிறோம். $A \times B = V$ என்பது A, B ஆகிய வெக்டார்களைக் கொண்ட தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான ஒரு வெக்டாராகும். அதேபோல், $(A \times B) \times C = V \times C$ என்பது V, C



படம் 14 B

ஆகிய வெக்டார்களைக் கொண்டுள்ள தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான மற்றொரு வெக்டார். எனவே, $(V \times C)$ என்ற வெக்டார் $(A \times B)$ என்ற வெக்டாருக்கு நேர்க்குத்தானது. ஆதலால், $(V \times C)$ என்ற வெக்டார் A,B என்ற வெக்டார்களைக் கொண்டுள்ள தளத்திலேயே இருக்கும்.

மேலும், வெக்டார் மும்மைப் பெருக்கல்களுக்குப் பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருந்தக் காணலாம்:

$$(A\times B)\times C = V\times C = -C\times V - C\times(A\times B) \qquad (8.19)$$

$$(A\times B)\times C = (A.C)\,B - (B.C)\,A \qquad (8.20)$$

சமன்பாடு (8.20)-பகுதி 10-ல் விளக்கக் கணக்கில் பெறப்பட்டுள்ளது.

9. வெக்டார் அளவுகளின் முக்கியத்துவம்:

இந்த நிலையில் வெக்டார் அளவுகளின் அடிப்படை முக்கியத்துவத்தைப் பற்றிக் கூறலாம்.

A, B, C என்ற மூன்று வெக்டார்களைக் காண்போம். x, y, z ஆயக்கோடுகள் தொகுதியில் முறையே சமன்பாடு (5.2)-ன்படி

$$A = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

அதேபோல் $$B = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$C = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \qquad \ldots\ldots(9.1)$$

மேலும் A+B = C எனக்கொள்வோமாயின்

$a_x+b_x = c_x$; $a_y+b_y = c_y$; $a_z+b_z = c_z$ ஆகும் (9.2)

இப்போது $x'y'z'$ என்ற ஆயக்கோடுகளின் தொகுதியில் அதே சமன்பாடுகளைக் காண்போம். (படம் 15) இத் தொகுதியில் $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ என்பன அலகு வெக்டார்களானால்

$$A = a'_x \vec{i}' + a'_y \vec{j}' + a'_z \vec{k}'$$

$$B = b'_x \vec{i}' + b'_y \vec{j}' + b'_z \vec{k}'$$

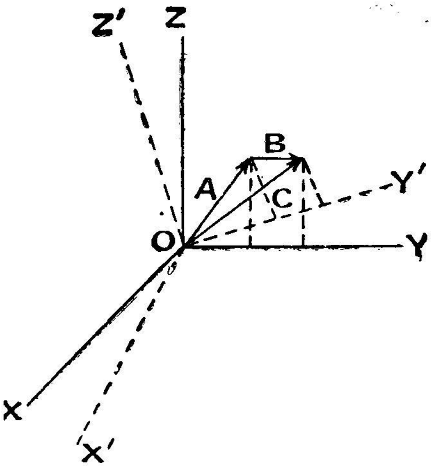
$$C = c'_x \vec{i}' + c'_y \vec{j}' + c'_z \vec{k}' \qquad \ldots.(9.3)$$

இத்தொகுதியில் வெக்டார்களின் கூறுகள் மாறுபட்டுள்ளன எனினும், இத்தொகுதியிலும், பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருந்துவதைப் படம் விளக்கும்.

$a_x'+b_x' = c_x'$; $a_y'+b_y' = c_y'$; $a_z'+b_z = c_z'$ (9.4)

இதனைச் சமன்பாடு (9.2)-உடன் ஒப்பிட்டால், இந்த இரண்டாவது தொகுதியிலும்

A+B = C என்ற வெக்டார் சமன்பாடு மெய்யானது என்பது புலனாகிறது. எனவே, ஆயக்கோடுகள் மாற்றப்பட்டாலும் வெக்டார் தொடர்புகள் மாற்ற முயறுவதில்லை,



படம் 14 C

எனவே, இயற்பியல் சமன்பாடுகளும்,தொடர்புகளும் வெக்டார் சமன்பாடுகளாகத் தரப்பட்டால் அவை எடுத்துக்கொண்ட ஆயக் கோடுகள் தொகுதியைப் பொருத்து மாறுவதில்லை. எனவே, இயற்பியல் உரைகள் எல்லாவிதமான ஆயக்கோடுகள்தொகுதியிலும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளன. இச் சிறப்புப்பண்பு மிகவும் தேவையானதும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததும் ஆகும்.

10. சில எளிய பயிற்சிகள் (Exercises):

முந்திய பகுதிகளில் இதுவரை நாம் கூறி வந்தவைகளின் பயன்களை இப்பகுதியில் சில விளக்கக் கணக்குகள் மூலமாகக் காண்போம். இப்பகுதியில் பெரும்பாலும் முன்பு சொன்ன குறியீடுகளையே பயன்படுத்துவோம்.

விளக்கக் கணக்கு (1): A,B என்பவை இணை வெக்டார்களென்றால், அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

A, B ஆகியவை இணை வெக்டார்களாதலால் அவற்றின் திசையில் $\vec{u}$ என்ற அலகு வெக்டாரை எடுத்துக்கொள்வோமாயின்

$\vec{u} = A/a$ என எழுதலாம். (10.1)

அதேபோல் $\vec{u} = B/b$ ஆகும். (10.2)

எனவே, (10.1), (10.2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

அல்லது $A = \frac{a}{b} B$ (10.3)

இதுவே A-க்கும் B-க்குமிடையேயுள்ள தொடர்பாகும்.

விளக்கக் கணக்கு (2) : P, Q, R என்ற வெக்டார்களுக்குப் பின் வரும் சமன்பாடுகள் பொருந்துகின்றன :

(i) $P+2Q=R$ (10.4)

(ii) $P-3Q=2R$ (10.5)

அவ்வாருனால், P, R-ன் திசையில் உள்ளதென்றும் Q-எதிர் திசையிலுள்ளதெனவும் காட்டு.

சமன்பாடு (10.4) ஐ 2-ஆல் பெருக்கினால்

$2P + 4Q = 2R$ ஆகும். இதிலிருந்து சமன்பாடு

(10.5) ஐக் கழித்தால்,

$P + 7Q = O$ ஆகும். (10.6)

அதாவது, $P = -7Q$ (10.7)

எனவே, Q, P-க்கு எதிர்த்திசையில் உள்ளது. இச் சமன்பாடு (10.7) ஐ (10.5)-ல் பிரதியிட்டால்,

$-10\,Q = 2R$ எனக் கிடைக்கும். (10.8)

எனவே, Q, R-க்கு எதிர்த்திசையில் உள்ளது. இதிலிருந்து P-யும் R-ம் ஒரே திசையில் உள்ளன என்பது தெளிவு.

விளக்கக் கணக்கு (3) :

$\mathbf{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ஆனால்,

$a = \sqrt{\mathbf{A.A}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ எனக்காட்டு.

(இதில் a-என்பது வெக்டார் A-யின் எண்மதிப்பு).

வரையறைப்படி (சமன்பாடு 7.1)

$\mathbf{A.A} = a \times a \times \text{Cos}\, o = a^2$

எனவே $a = \sqrt{\mathbf{A.A.}}$ (10.9)

$\mathbf{A} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_x \vec{k}$ ஆதலால்

$\mathbf{A.A} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_x \vec{k})$

$= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ (சமன்பாடு 7.11-ன்படி)

எனவே, $a = \sqrt{\mathbf{A.A}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (10.10)

விளக்கக் கணக்கு (4) :

$\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ என்ற வெக்டாருக்கும் $\vec{B} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ என்ற வெக்டாருக்கும் இடைக்கோணத்தைக் கணக்கிடு.

a, b ஆகியவை முறையே A, B ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புக் களானல், சமன்பாடு (10.10)-ன்படி

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}$$
$$= 3$$

அதேபோல் $$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}$$
$$= 7$$

A, B ஆகியவற்றின் இடைக்கோணம் θ என்போம்.

$A.B = a\,b \cos\theta$ ஆதலால்,

$$A.B = 3 \times 7 \cos\theta \qquad (10.11)$$

சமன்பாடு (7.11)-லிருந்து

$A.B = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ஆதலால்,

$$A.B = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2)$$
$$= 4 \qquad (10.12)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (10.11), (10.12) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\cos\theta = \frac{4}{21} = 0.1905$$

அல்லது, $\theta = 79^\circ$ (ஏறத்தாழ).

விளக்கக் கணக்கு (5) :

ஒரு சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தானவை எனக்காட்டுக.

P, Q, R, S என்பது சாய் சதுரத்தையும் (படம் 15) PR, QS என்பன மூலைவிட்டங்களையும் குறிக்கட்டும்.

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \qquad (10.13)$$

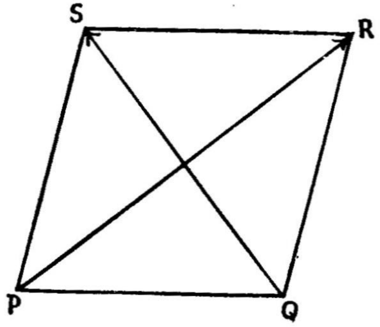
$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS} \qquad (10.14)$$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ ஆதலால்,(10.14) ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR}$$

அதாவது, $$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{PQ} \qquad (10.15)$$

எனவே, $\overrightarrow{PQ} = A$ எனவும்



படம் 15

$\overrightarrow{QR} = B$ எனவும் கொள்வோமானல்

$$\overrightarrow{PR} = A + B$$

$\overrightarrow{QS} = B - A$ ஆகும்.

$$(A + B) . (B - A) = A.B - A.A + B.B - B.A$$
$$= B.B - A.A$$
$$= b^2 - a^2 = O.$$

ஏனெனில், $b = a$ ஆகும். சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளங்கள் சமமானவை.

எனவே, (A + B)யும், (B − A)யும் அதாவது, $\overrightarrow{PR}$-ம் $\overrightarrow{QS}$-ம் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தானவை. இல்லாவிடில், அவற்றிற்கிடையே புள்ளிப் பெருக்கலின் மதிப்பு சுழியாகாது.

விளக்கக் கணக்கு (6) :

வழக்கமான குறியீடுகளில்

$$A.\ (B \times C) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

எனக்காட்டுக.

சமன்பாடு (8·11)-ன் படி

$$B \times C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ஆதலால், $A.\ (B \times C) = A. \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

$$= A.\ [\ (b_y c_z - b_z c_y)\ \vec{i} + (b_z c_x - b_z c_y)\ \vec{j}$$

$$+ (b_x c_y - c_x b_y)\ \vec{k}]$$

ஆனால் $A = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ஆதலால்,

$$A.\ (B \times C) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})\ .\ [b_y c_z - b_z c_y)\vec{i}$$

$$+ (b_z c_x - b_x c_z)\ \vec{j} + (b_x c_y - b_y c_x)\ \vec{k}]$$

$$= a_x (b_y c_z - b_z c_y) + a_y (b_z c_x - b_x c_z)$$

$$+ a_z (b_x c_y - b_y c_x)$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

இதுவே தேவையான சமன்பாடாகும்.

விளக்கக் கணக்கு (7) :

$$A \times (B \times C) = B(A.C) - C(A.B)$$

எனக்காட்டுக.

முந்திய கணக்கில் செய்தது போலவே செய்தால்,

$$A \times (B \times C) = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + [(b_y c_z - c_y b_z)\vec{i} + (b_z c_x - c_z b_x)\vec{j} + (b_x c_y - c_x b_y)\vec{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ (b_y c_z - c_y b_z) & (b_z c_x - c_z b_x) & (b_x c_y - c_x b_y) \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_x c_y - a_y c_x b_y - a_z b_z c_x + a_z c_z b_x)\vec{i}$$

$$+ (a_z b_y c_z - a_z c_y b_z - a_x b_x c_y + a_x b_y c_x)\vec{j}$$

$$+ (a_x b_z c_x - a_x c_z b_x - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y)\vec{k} \qquad (10.16)$$

இப்போது B (A.C) — C (A.B) யின் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$B(A.C) - C(A.B)$$

$$= (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)$$

$$- (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k})(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

$$= (a_y b_x c_y + a_z b_x c_z - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x)\vec{i}$$

$$+ (a_x b_y c_x + a_z b_y c_z - a_x b_x c_y - a_z b_z c_y)\vec{j}$$

$$+ (a_x b_z c_x + a_y b_z c_y - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z)\vec{k} \qquad (10.17)$$

சமன்பாடுகள் (10·16), (10.17) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$A \times (B \times C) = B(A.C) - C(A{\cdot}B)$$ எனக் காணலாம். (10.18)

பயிற்சிக் கணக்குகள் :

1. A, B, C என்ற மூன்று வெக்டார்கள் முறையே ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களைச் சுற்று வரிசை முறையில் குறித்தால், அவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

2. A, B, C என்ற மூன்று வெக்டார்கள் ஒரு தளத்திலுள்ளவை என்பதைக் குறிக்கும் சமன்பாடு என்ன?

3. A.B = O ஆனல், அவ்விரு வெக்டார்களைப் பற்றி நீ அறிவது என்ன?

4. பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக:

(i) $\vec{j} \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k})$

(ii) $(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot (3\vec{i} + \vec{k})$

5. $A = 2\vec{i} + a\vec{j} + \vec{k}$ என்ற வெக்டாரும்

$B = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ என்ற வெக்டாரும்

ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தாக இருந்தால், a-யின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

6. A என்பது ஏதேனுமொரு வெக்டாரானல்,

$A = (A.\vec{i})\vec{i} + (A.\vec{j})\vec{j} + (A.\vec{k})\vec{k}$ எனக்காட்டுக.

7. $[(A + B)^2 + (A.B)^2]$-ன் மதிப்பினைக் கணக்கிடுக.

8. $A . (A \times C) = O$ என நிறுவுக.

9. $A . (B \times C) = (A \times B) . C$ எனக்காட்டுக.

10. $A . (B \times C) = B . (C \times A) = C . (A \times B)$ எனக் காட்டுக.

11. $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = O$ எனக் காட்டுக,

12. $(A - B) \times (A + B) = 2(A \times B)$ எனக்காட்டு

13. $|A + B| = |A - B|$ ஆனல் A-யும், B-யும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தானவை யெனக்காட்டுக.

14. A, B என்ற பக்கங்கள் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பு $|A \times B|$ எனக்காட்டுக.

11. வெக்டார் பகுநியாக்கம் (Differentiation of Vector)

சுற்றுப்புறத்தின் ஒரு பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி $(x, y, z,)$-உடனும் ஒரு எண் அல்லது ஸ்கேலார் $\phi\ (x, y, z)$ தொடர்பு கொண்டிருந்தால், ϕ என்பதை ஸ்கேலார் இடச்சார்பு

அல்லது ஸ்கேலார் புள்ளிச்சார்பு (Scalar function of position or Scaler point function) எனக் கூறுகிறோம். அப்பகுதியில் ஒரு ஸ்கேலார் புலம் (Scalar field) வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கூறுகிறோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் புவியில் உள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளியின் வெப்ப நிலையை ஸ்கேலார் இடச்சார்பு எனலாம். அதே போல் $\phi(x, y, z) = x^2 y - z^2$ என்ற சமன்பாடு ஒரு ஸ்கேலார் புலத்தைக் குறிக்கிறது

அதேபோன்று சுற்றுப்புறத்தின் ஒரு பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு (x, y, z) என்ற புள்ளியுடனும், ஒரு வெக்டார் $A(x, y, z)$ தொடர்பு கொண்டிருந்தால் A யை வெக்டார் இடச்சார்பு (Vector function of position) அல்லது வெக்டார் புள்ளிச்சார்பு (Vector point function) எனக் கூறுகிறோம் அப்பகுதியில் ஒரு வெக்டார் புலம் (Vector field) வரையறுக்கப் பட்டுள்ளதாகக் கூறுகிறோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் திரவத்துள் ஒரு புள்ளியில் அதன் திசைவேகம் தெரிந்திருந்தால், வெக்டார் புலம் வரையறுக்கப்படுகிறது. அதேபோல $A(x, y, z) = xy^2 \vec{i} - yz^2 \vec{j} + x^2 z \vec{k}$ என்பது ஒரு வெக்டார் புலத்தை வரையறுக்கும்.

பகுதி காணும் முறை :

இப்போது A (t) எனக் குறிக்கப்படும் வெக்டார், t என்ற ஸ்கேலாரைப் பொறுத்து மாறுபடும் வெக்டார் என்போம்.

$\triangle t$ என்ற குறுகிய காலத்தில் A யின் மதிப்பு A (t) யிலிருந்து $A(t + \triangle t)$ ஆக மாறுகிற தென்போம். இம்மாற்றத்தை $\triangle A$ எனக் குறிப்போமானல்,

$$\frac{\triangle A}{\triangle t} = \frac{A(t + \triangle t) - A(t)}{\triangle t} \text{ ஆகும்.} \qquad (11.1)$$

A என்ற வெக்டாரின் t என்ற ஸ்கேலாரைப் பொறுத்த பகுதியை $\frac{dA}{dt}$ என எழுதுகிறோம். இதனைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்:

$$\frac{dA}{dt} = \underset{\triangle t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{\triangle A}{\triangle t} \qquad (11.2)$$

இதில் $\left\{ \begin{matrix} \text{எல்லை} \\ \triangle t \to 0 \end{matrix} \right\}$ என்பது $\triangle t$ யின் மதிப்பு, குறைந்து கொண்டே வந்து சுழியாகும் நிலைக்குச் செல்லும் வரம்பினைக் (limit) குறிக்கும். எனவே,

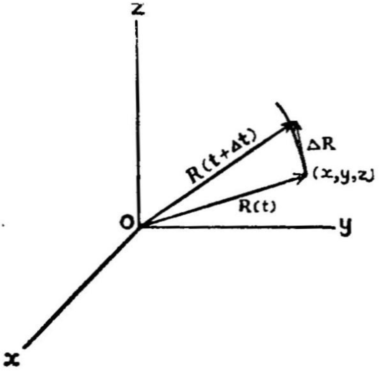
$$\frac{dA}{dt} = \underset{\Delta t \to O}{\text{எல்லை}} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \qquad (11.3)$$

இதில் $\frac{dA}{dt}$ என்பதும் t-யைப் பொறுத்த ஒரு வெக்டா ராதலால், இதற்கும் t-யைப் பொறுத்துப் பகுநி காணலாம். இதனை $\frac{d^2A}{dt^2}$ எனக் குறிப்போம். இதேபோல் தொடர்ந்து உயர்வரிசைப் பகுநிகளைக் காணலாம்.

இப்போது இடத்தைக் குறிக்கும் R என்ற வெக்டாரைக் காண்போம். ஆயத்தோற்றுவாய்ப் புள்ளி (Origin of Co-ordinates) யிலிருந்து (x, y, z) என்ற புள்ளியை இணைக்கும் வெக்டாரை R குறிப்பதாகக் கொண்டால்,

$$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ என எழுதலாம்.} \qquad (11.4)$$

இப்போது R என்பது t என்ற ஸ்கேலாரைப் பொருத்து மாறுபடும் வெக்டாரானல், R = R (t) ஆகும். எனவே சமன்பாடு (1 1.4)ல்



படம் 16

$$x = x(t) \,;\, y = y(t) \,;\, z = z(t) \text{ ஆகும்.} \qquad (11.5)$$

சமன்பாடு (11.1)-ன் படி, R என்ற வெக்டாருக்கு

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \qquad (11.6)$$

இப்போது $\underset{\Delta t \to O}{\text{எல்லை}} \frac{\Delta R}{\Delta t}$ யைக் காண்போமாயின், அது R-ன் முனை செல்லும் கோட்டிற்குத் தொடுகோட்டின் திசையில் இருக்கும். அதன் மதிப்பு (11.4)-லிருந்து

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{11.7}$$

இதில் t என்பது காலத்தைக் குறித்தால் $\frac{dR}{dt}$ என்பது R-ன் முனைப் புள்ளியின் திசைவேக வெக்டார் V-யைக் குறிக்கும் அதேபோல் $\frac{dV}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2}$ என்பது அப்புள்ளியின் முடுக்கம் A என்ற வெக்டாரைக் குறிக்கும

சமன்பாடு (11.7)-ஐ மெய்ப்பித்தல் :

$$\frac{dR}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} \tag{11.8}$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k}}{\Delta t} - \frac{x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}}{\Delta t} \right]$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}\vec{j} \right]$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

எனவே $\frac{dR}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ ஆகும்.

இவ்வாறு பொதுவாக ஸ்கேலார் சார்புகளுக்குப் பகுநிகள் காண்பது போலவே வெக்டார்களுக்கும் பகுநிகள் காணலாம். வெக்டார் பெருக்கல்களின் பகுநிகள் காணும் போது வெக்டார் களின் வரிசை முறையை மாற்றக்கூடாது இம்முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளை எளிதில் நிறுவலாம்:

A, B, C என்பன t என்ற ஸ்கேலாரைப் பொருத்த வெக்டார் களெனவும், f என்பது t-யைப் பொருத்த ஸ்கேலார் எனவும் கொள்வோம்.

$$\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \tag{11.9}$$

$$\frac{d}{dt}(fA) = \frac{df}{dt}A + f\frac{dA}{dt} \tag{11.10}$$

$$\frac{d}{dt}(A.B) = \frac{dA}{dt}.B + A.\frac{dB}{dt} \tag{11.11}$$

$$\frac{d}{dt}(A \times B) = \frac{dA}{dt} \times B + A \times \frac{dB}{dt} \tag{11.12}$$

$$\frac{d}{dt}(A.B\times C) = \frac{dA}{dt}.B \times C + A.\frac{dB}{dt} \times C + A.B \times \frac{dC}{dt} \tag{11.13}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{A \times (B \times C)\right\} = \frac{dA}{dt} \times (B \times C) + A \times \left(\frac{dB}{dt} \times C\right) + A \times \left(B \times \frac{dC}{dt}\right) \tag{11.14}$$

இவை யனைத்தையும் முன்பு கூறிய விளக்கங்களிலிருந்து எளிதில் மெய்ப்பிக்கலாம்.

12. வெக்டார் தொகுதி யாக்கம் (Integration of Vectors)

ஒரு வெக்டாரின் எல்லை குறிப்பிடாத தொகுதி (Indefinite Integral) என்பதுவெக்டார் பகுதியை காண்பதற்கு நேர் எதிரான செயலாகும். F என்ற வெக்டாரின் t-யைப் பொறுத்து எல்லை குறிப்பிடாத தொகுதியை $\int F\,dt$ என எழுதுவோம். F என்பது வெக்டாரானல் $\int \mathbf{F}\,dt$ என்பதும் ஒரு வெக்டாராகும்

$F = \frac{dA}{dt}$ என்ற சமன்பாடு பொருந்தும் வகையில் A என்ற வெக்டார் ஒன்று உள்ளதாகக் கொள்வோம். A என்பதும் t-யைப் பொறுத்து மாறுபடும் ஓர் வெக்டாராகும். அவ்வாருயின்,

$$\int F\,dt = \int \frac{dA}{dt}\,dt = A + C \tag{12.1}$$

இதில் C என்பது *t*-யைப் பொருத்து மாறுபடாத ஒரு வெக்டார். இதனைத் தொகுதி மாறிலி (Constant of Integration) என்போம் A வெக்டாராக இருந்தால் C-யும் வெக்டாராக இருக்கும்.

(A + C) யை t-யைப் பொறுத்துப் பகுதி காண்போமானால்,

$$\frac{d}{dt}(A + C) = \frac{dA}{dt} \qquad (12.2)$$

எனக்கிடைக்கும்.

சமன்பாடுகள் (12.1), (12.2) ஆகியவற்றிலிருந்து தொகுதி யாக்கத்திற்கும், பகுதியாக்கத்திற்கு முள்ள தொடர்பு புலப்படும்.

$\int F\,dt$ யின் மதிப்பை $t = a$, $t = b$ ஆகிய எல்லைகளுக் கிடையில் காண்போமானால், அதனை $\int_{t=a}^{t=b} F\,dt$ அல்லது, $\int_a^b F\,dt$ என எழுதுவோம். அத்தகைய தொகுதிகளை எல்லை குறித்த தொகுதி கள் (definite Integrals) என்போம். இத்தகைய தொகுதிகளின் மதிப்புக்களைக் காண்கையில், தொகுதி ஆக்கத்துக்குப் பின்னர் முதலில் மேல் எல்லையின் மதிப்பைப் பிரதியிட்டு, அதிலிருந்து கீழ் எல்லையின் மதிப்பைப் பிரதியிட்டு வருவதைக் கழிக்க வேண்டும் காட்டாக, சமன்பாடு (12.1) ன் படி

$$\int_a^a F\,dt = \Big[A + C\Big]_a^b \qquad (12.3)$$

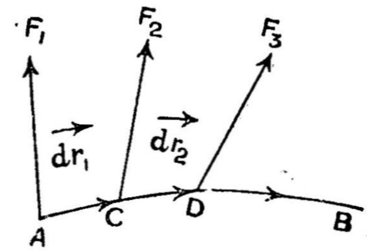
$t = b$ ஆக இருக்கும் போது $A = A(b)$ ஆகவும், $t = a$ ஆக இருந்த போது $A = A(a)$ ஆகவும் இருந்தால், சமன்பாடு (12.3)-ன் வலது புறத்தின் மதிப்பு

$$[A(b) + C] - [A(a) + C] = A(b) - A(a) \qquad (12.4)$$

எனவே, எல்லை குறித்த தொகுதியைக் காணும்போது தொகுதி மாறிலி (c)யை விட்டு விடலாம்

13. கோட்டுத் தொகுப்பு (line integral)

$F(x, y, z)$ என்பது ஒரு வெக்டார் இடச்சார்பு எனக் கொள் வோம். AB என்பது (படம் 17) A என்ற புள்ளியிலிருந்து B என்ற



படம் 17

புள்ளிக்கு வரையப்பட்ட ஒரு கோடு. இக்கோட்டினை dR_1, dR_2, dR_3 ….. முதலியவை, முறையே AC, CD, DE…… .. ஆகிய வற்றைக் குறிக்கும் சிறு வெக்டார் பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள் வோம். A-யில் $F = F_1$ எனவும், C-யில் $F = F_2$ எனவும் D-யில் $F = F_3$ எனவும் வரிசையாக B-வரை F- ன் மதிப்புகளைக் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்போது A-யிலிருந்து B-வரை $(F.dR)$-ன் மதிப்புக்களைக் கண்டு அவற்றைத் தொகுத்தால் $\int_A^B F.dR$ கிடைக்கும். இதனை A-யிலிருந்து B-வரை F-க்குக் காணும் கோட்டுத் தொகுநி என் கிறோம்.

$$\int_A^B F.\,dR = F_1.\,dR_1 + F_2.\,dR_2 + F_3.\,dR_3 + \ldots\ldots \quad (13.1)$$

மேலும்,
$$F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad (13.2)$$

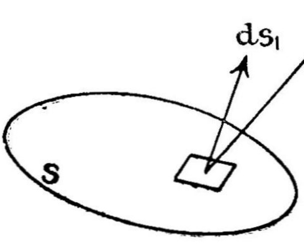
$$dR = \vec{i}\, d_x + \vec{j}\, d_y + \vec{k}\, d_z \quad (13.3)$$

ஆதலால்,
$$\int_A^B F.\,dR = \int_A^B (F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z) \quad (13.4)$$

இதில் F என்பது AB என்ற கோட்டில் செல்லும் ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் விசையைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால், நகரும் கோட்டின் வழியே எடுக்கப்படும் F-ன் கோட்டுத் தொகுநி விசை புரியும் பணியைக் (Work) குறிக்கும்.

14. பரப்புத் தொகுப்பு (Surface Integral)

S என்ற ஒரு பரப்பினை எடுத்துக் கொள்வோம். இதனை dS_1, dS_2, ……….என்ற மிகச்சிறு பரப்புக்களாகப் பிரிக்கலாம் (படம் 18). இப் பரப்புடன் $F(x, y, z)$ என்ற ஒரு வெக்டார் இடச்சார்பு கொண்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். dS_1, dS_2………என்ற சிறு பரப்புக்களில் F-ன் மதிப்புக்கள் முறையே F_1, F_2………எனக்



படம் 18

கொள்வோம். இப்போது (F_1, dS_1), (F_2, dS_2),..........என்ற புள்ளிப் பெருக்கல்களின் மொத்த மதிப்பு

$$\Sigma\ F.\ dS = \int_S F.\ dS \text{ ஆகும்} \qquad (14.1)$$

$\int_S F.\ dS$ என்பதை S-என்ற பரப்பில் F-ன் பரப்புத் தொகுநி எனக் கூறுகிறோம். இதனை $\int\int_S F.\ dS$ எனவும் எழுதுவதுண்டு]

இந்தப் பரப்புத் தொகுநி நேர்க்குறியுடையதா அல்லது எதிர்க் குறியுடையதா என்பது பரப்பின் எந்தப் பக்கம் நேர்க்குறியுடையது என்பதைப் பொறுத்து அமையும். பொதுவாகப் பின்வரும் குறிமரபு (Sign convention) கையாளப் பெறும் :

(i) மூடிய பரப்பாகவோ, அல்லது அதன் பகுதியாகவோ இருந்தால், அப் பரப்பிலிருந்து வெளிவரும் இயல்புக்கோடு அல்லது செங்கோடு (Outward normal) எந்தத் திசையில் செல்கிறதோ, அத்திசை நேர்க்குறியுடையது

(ii) மற்ற பரப்புகளின் செங்கோடுகளின் திசை, பரப்பின் விளிம்பினை விளம்பும் போது, அத்திசையில் வலம்புரித் திருகைச் சுழற்றினுல் திருகின் முனை முன்னேக்கி நகரும் திசையாக இருந்தால், நேர்க்குறியுடைய தெனவும், எதிர்திசையாக இருந்தால் எதிர்க்குறியுடைய தெனவும் கொள்ளப்படும்.

$$F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \qquad (14.2)$$

$$dS = dS_x \vec{i} + dS_y \vec{j} + dS_z \vec{k} \qquad (14.3)$$

$$\text{எனவே,} \int_S F.\ dS = \int_S (F_x\, dS_x + F_y\, dS_y + F_z\, dS_z) \qquad (14.4)$$

என எழுதலாம்.

வெக்டார் F-ன் பரப்புத் தொகுநியை, F-ன் பாயம் (Flux) எனக் கூறுவோம். F என்பது ஒரு பாய்பொருளின் (Fluid) அடர்த்தி, திசைவேகம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனென் போம்.

$$F.\ dS = f.\ dS\ \cos\theta \text{ ஆகும்.} \qquad (14.5)$$

இதில் f, ds என்பன முறையே F, ds என்ற வெக்டார்களின் எண்மதிப்புக்களைக் குறிப்பன அடர்த்தி ρ எனவும் திசைவேகத் தின் எண்மதிப்பு v எனவும் கொண்டால், $f = \rho v$ ஆதலால்,

$$F.dS = \rho\ ds\ v \cos\theta \text{ ஆகும்} \qquad (14.6)$$

$v \cos\theta$ என்பது ds-க்கு நேர்க்குத்தான திசைவேகக்கூறு ஆதலால், $ds\ v \cos\theta$ என்பது 1 செகண்டில் ds-க்கு நேர்க்குத்துத்திசையில் செல் லும் பருமனையும், $\rho\ ds\ v \cos\theta$ என்பது 1 செகண்டில் அத்திசையில்

செல்லும் பாய்பொருளின் நிறையையும் குறிக்கும். எனவே, F. ds என்பது பாயும் பொருளின் நிறையை அளவிடக் கூடிய தாகும்.

மின்வலிமையின் பாயம் அல்லது மின்பாயம் (Electric Flux என்பது மின்னியலில் ஒரு முக்கிய பௌதிக அளவாகும். அதே போன்று மாறுதிசை மின்னோட்ட அறிமுறையில் (Theory of Alternating Currents) காந்தப் பாயம் (Magnetic Flux) என்பது முக்கியத்துவம் கொண்டதாகும்.

15. பருமத் தொகுநி (Volume Integral)

F (x, y, z) என்ற வெக்டார் சார்பின் தொகுநியை V என்ற பருமனில் காண்போமாயின், அதனை $\int_V F dv$ என எழுதலாம்.

$dv = dx\, dy\, dz$ என்ற சிறு பருமப் பகுதியைக் குறித்தால், பருமன் V-யை dv_1, dv_2 ... ... ஆகிய பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

dv_1 என்ற சிறு பருமனில் F ன் மதிப்பு F_1 ஆகவும், dv_2-ல் F_2 ஆகவும், dv_3-ல் F_3 ஆகவும் இருந்தால்,

$$\int_V F dv = F_1 dv_1 + F_2 dv_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (15\cdot1)$$

மேலும், $F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ ஆதலால்

$$\int_V F\, dv = \vec{i} \int_V F_x\, dv + \vec{j} \int_V F_y\, dv + \vec{k} \int_V F_z\, dv \quad \ldots\ldots (15\cdot2)$$

எனவும் எழுதலாம்.

சமன்பாடு (15·2)ல் $\int_V F_x\, dv$, $\int_V F_y\, dv$, $\int_V F_z\, dv$ என்ற தொகுப்புகள் ஸ்கேலார் தொகுப்புகளாகும்.

கோட்டுத் தொகுநியில் dR என்பது ஓர் வெக்டார் அளவு அதேபோல் பரப்பு ds ஓர் வெக்டார் அளவு. ஏனெனில் $ds = ds.\vec{n}$ ஆகும். இதில் ds என்பது பரப்பின் எண்மதிப்பையும், $\vec{n}$ என்பது அப் பரப்பின் செங்கோட்டின் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டாரையும் குறிக்கும். ஆனால், பருமன் dv என்பது ஒரு ஸ்கேலார் அளவே.

16. வெக்டார் வாட்டம் (Gradient Vector)

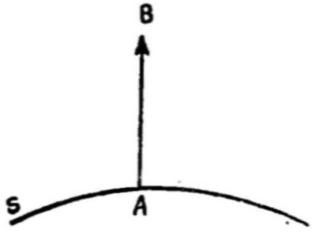
சுற்றுப்புறத்தின் ஒரு பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் ஒரு ஸ்கேலார் தொடர்பு கொண்டிருந்தால், அப்பகுதி

ஸ்கேலார் புலமெனப்படும். எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் வளிமண்டலத்தின் அழுத்தம் அல்லது வெப்ப நிலையை ஒரு ஸ்கேலார் புலமாகக் கொள்ளலாம். அதேபோல் நாட்டின் பல்வேறு இடங்களின் உயரங்களைக் காட்டும் வரைபடத்தில் உயரம் ஓர் ஸ்கேலார் புலமாகும். [பகுதி 11 காண்க.

அவ்வாறின்றிப், புலத்தில்உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் ஒரு வெக்டார் தொடர்பு கொண்டிருந்தால் அதனை வெக்டார் புலமெனக் கூறுவோம். வளி மண்டலத்தில் காற்றின் திசைவேகத்தை வெக்டார் புலமெனலாம்.

இப்போது ஒரு ஸ்கேலார் புலம், ஒரு வெக்டார் புலத்துடன் எளிய தொடர்பு கொண்டிருப்பதைக் காட்டுவோம். பொதுவாக முப்பரிமாணத்தில் (Three dimensional) உள்ள புள்ளிகளைக் காண்போமாயினும், வரைபடத்தில் உயரத்தைக் காட்டும் கோடு களை மனதில் கொண்டு உருவகப் படுத்திக் கொள்ளலாம்.

ϕxyz என்ற நேர்க்குத்து ஆயக்கோடுகள் தொகுதியில் (Rectangular Co-ordinate System), $\phi(x,y,z)$ என்பது (x,y,z) என்ற புள்ளியில் ஸ்கேலார் புலத்தைக் குறிக்கட்டும். ϕ = மாறிலி என்பது ஒரே அளவு ϕ மதிப்புள்ள புள்ளிகளையெல்லாம் இணைக்கும் பரப்பினைக் குறிக்கும். (வரை படத்தில் சம உயரமுள்ள இடங்களை யெல்லாம் ஒரு சம உயரக் கோடு இணைப்பதைப்



படம் 19

போன்று.) இத்தகைய பரப்பு (S) படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதன்மீது A என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். இப் பரப்பினை விட்டு மேலேயோ அல்லது கீழேயோ உள்ள புள்ளிகளில் ϕ-யின் மதிப்பு அதிகமாகலாம் அல்லது குறையலாம். ϕ-யின் மதிப்பு அதிகமாகும் பக்கத்தில் அப்பரப்பிற்கு AB என்ற n நீளமுள்ள இயல்புக்கோடு (normal) அல்லது செங்கோட்டினை வரைவோம். n-ன் திசையில் ϕ மாறுபடுவதால், ϕ என்பது n- ஐச் சார்ந்த ஒரு சார்பாகும். மேலும், AB என்ற திசையில் ϕ அதிகமாவதால் A-யில்

$\frac{d\phi}{n} > 0$ ஆகும்.

இப்போது $\overrightarrow{AB}$ என்ற வெக்டார் வாட்டத்தை (Gradient Vector) வரையறுப்போம். ϕ-யின் வெக்டார் வாட்டத்தை $\nabla\phi$ என்ருே அல்லது கிராட் ϕ (Grad ϕ) என்ருே குறிப்பிடலாம். நாம் $\nabla\phi$ என்றே குறிப்பிடுவோம். $\nabla\phi$ பின்வரும் பண்புகளைக் கொண்டிருக்கும் ஒரு வெக்டார்:

(i) அதன் எண்மதிப்பு A-என்ற புள்ளியில் $\frac{d\phi}{dn}$ என்ற அளவால் குறிக்கப்படும்.

(ii) அதன் திசை A என்ற புள்ளியில் S என்ற பரப்புக்கு வரைந்த இயல்புக் கோட்டில் ϕ-ன் மதிப்பு அதிகமாகும் திசையில் இருக்கும்.

$x\ y, z$ ஆகியவை முறையே d_x, d_y, d_z என்ற சிறு அளவுகள் உயரும்பொழுது சாதாரண நுண்கணித (Calculus) முறைப்படி ϕ-ன் மதிப்பு $d\phi$ என்ற மாறுபாடடைந்தால்

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \text{ ....} \qquad (16.1)$$

இதில் $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ என்பன பகுதி வேறுபாடுகளைக் (Partial derivatives) குறிப்பன.

S என்ற பரப்புக்கு A என்ற புள்ளியில் இடத்தைக் குறிக்கும் வெக்டார் R எனக் கொண்டால் சமன்பாடு (11·4)-ன்படி

$$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$ ஆகும், மேலும்,

$$dR = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k} \text{..............} \qquad (16\cdot2)$$

என்ற சமன்பாடு A என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் திசையிலுள்ள வெக்டாரைக் குறிக்கும். ஆனால் d_x, d_y, d_z என்பன சமன்பாடு (16·1)-க்கும் பொருந்தும் வகையில் இருக்க வேண்டும்

இம்போது $\nabla\phi$ என்ற வெக்டாரைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறேம்.

$$\nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \text{...........} \qquad (16\cdot3)$$

சமன்பாடுகள் (16·2), (16·3), ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி $\nabla\phi$, dR ஆகியவற்றின் புள்ளிப் பெருக்கலைக்கணக்கிட்டால்

$$\nabla\phi\cdot d\mathrm{R} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(16\cdot4)$$

எனக் கிடைக்கும். ($\because$ $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$; மேலும் $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{k}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = 0$ ஆகும்).

சமன்பாடு (16·4)ஐச் சமன்பாடு (16·1)-உடன் ஒப்பிட்டால் பின்வரும் தொடர்பு புலப்படும்:

$$\nabla\phi\cdot d\mathrm{R} = d\phi \qquad (16\cdot5)$$

வரை கணித முறையில் $d\phi$ என்பது R (x,y,z) என்ற புள்ளியிலிருந்து R + dR $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ என்ற புள்ளிக்குச் செல்லுகையில் ϕ-யில் உண்டாகும் மாறுபாட்டைக் குறிக்கும்.

மேலும், $\nabla\phi$ யின் எண் மதிப்பு $|\nabla\phi|$ ஆகவும், dR-ன் எண் மதிப்பு $|d\mathrm{R}|$ ஆகவும், இவ்விரு வெக்டார்களின் இடைக்கோணம் θ ஆகவும் இருந்தால்

$$\nabla\phi\circ d\mathrm{R} = |\nabla\phi|\;|d\mathrm{R}|\cos\theta \qquad (16.6)$$

$$\text{எனவே, } d\phi = |\nabla\phi|\;|d\mathrm{R}|\cos\theta \qquad (16.7)$$

ஆதலால், R என்ற புள்ளியிலிருந்து R + dR என்ற அருகில் உள்ள புள்ளிக்குச் செல்லும் போது ϕ-யில் உண்டாகும் மாற்றம் $\nabla\phi$, dR ஆகிய வெக்டார்கள் ஒரே திசையிலிருக்கும் போது $(\theta = 0°)$ பெரும (Maximum) மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும். அந்நிலையில் $|\nabla\phi| = \dfrac{d\phi}{|d\mathrm{R}|}$ ஆகும் (16.8)

இதனை முன்பு நாம் வெக்டார் வாட்டத்தினைப் பற்றிக் கூறியவைகளுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்துக் கொள்ளலாம்.

முற்றிலும் குறியீட்டு முறையில் (Symbolic respresentation) சமன்பாடு (16.3) ஐ

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \;\;\ldots\ldots\ldots \qquad (16.9)$$

என்ற செயற்குறி வெக்டார் (Vector Operator), ϕ என்ற ஸ்கேலார் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனாகக் கொள்ளலாம். ∇ என்ற குறியீட்டை 'டெல்' என உச்சரிக்கிறோம். ∇ என்பது வரை கணித முறைப்படி எந்த வெக்டாரையும் குறிப்பதில்லையாயினும் ஒரு ஸ்கேலார் f-ன் மீது செயல்படும் போது ∇f என்ற வெக்டாரைக் கொடுக்கும்.

17. வெக்டார் விரிவு (Divergence of a Vector)

$\Delta\phi$ என்பதை ∇ வெக்டார், ϕ என்ற ஸ்கேலார் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனைக் கொள்ளலாமென முந்திய பகுதியில் கண்டோம். இப்போது ϕ என்ற ஸ்கேலார் சார்புக்குப் பதிலாக ஒரு வெக்டார் சார்பு F (x, y, z)-ஐ எடுத்துக் கொண்டால், ∇ - உடன் அதனைப் பெருக்கும்போது, அது ஒரு புள்ளிப் பெருக்கலாகவோ (Scalar or dot product) அல்லது குறுக்குப் பெருக்கலாகவோ (Vector or Cross product) இருக்கலாம். இப்பகுதியில். ∇F என்ற புள்ளிப் பெருக்கலைக் காண்போம்.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17.1)$$

$$F = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} \ldots\ldots\ldots \quad (17.2)$$

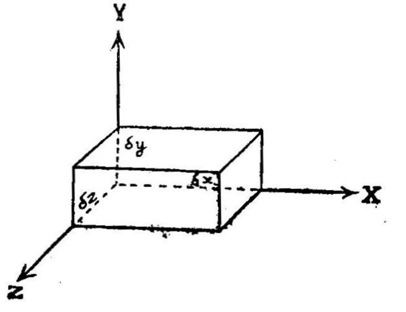
எனவே $$\nabla . F = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17.3)$$

என்பது தெளிவாகும். இது (சமன்பாடு 17.3) ஒரு ஸ்கேலார் ஆகும். இதனை F-என்ற வெக்டாரின் விரிவு (Divergence) என்கிறோம். இதனை டைவ் F எனவும் குறிக்கலாம். பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு இதன் முக்கியத்துவத்தை நன்கு விளக்கும்:

F என்பது ஒரு செகண்டில், ஓரலகுப் பரப்பின் வழியே பாய்ந்து செல்லும் நீர் அல்லது வாயு போன்ற பாய் பொருளின் (fluid) அளவை எண் மதிப்பிலும் திசையிலும் குறிக்கட்டும்.

திசைவேகம் V ஆகவும், அடர்த்தி ρ ஆகவும் இருந்தால், ஓரலகுப் பரப்பின் வழியே 1 செகண்டில் செல்லும் பாய்பொருளின் நிறை $F = \rho V$ .... (17.4)

மேலும், $$V = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \ldots\ldots\ldots \quad (17.5)$$



படம் 15

ஆகும்.

dx, *dy*, *dz* பக்கங்களுள்ள ஒரு இணைமுகப் பருமனை எடுத்துக் கொள்வோம். (Parallelopiped) (படம் 20)

ABCD என்ற பரப்பின் வழியே கடக்கும் நிறை $= v_x \rho\, d_y\, d_z$.
ஆனல், $v_x \rho = f_x$ ஆதலால் $v_x \rho\, dy\, dz = f_x\, dy\, dz$......... (17.6)
அதற்கு எதிரே உள்ள EFGH என்ற பரப்பினைக் கடக்கும் நிறை

$$\left\{ v_x \rho\, d_y\, d_z \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho\, v_x) dx \right\} dy\, dz.$$

$$= \left\{ f_x + \frac{\partial f_x}{\partial_x} dx \right\} dy\, dz........ \qquad (17.7)$$

இதில் $\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\, dx$ என்பது *dx* என்ற தொலைவில் (ρv_x)-ல் உண்டாகும் மாற்றத்தைக் குறிக்கும்.

எனவே, இவ்விரு பரப்புகளின் ஊடே திரவம் அல்லது வாயு செல்கையில் இணைமுகப் பருமனுள் தோன்றும் நிறை உயர்வு

$$= (17.6) - (17.7)$$

$$= - \frac{\partial f_x}{\partial x} d_x\, d_y\, d_z \text{ ஆகும்.}$$

இதேபோல் *dy*, *dz* என்ற திசைகளிலும் முறையே $\left(- \frac{\partial fy}{\partial y} dx\, dy\, dz\right)$, $\left(\frac{\partial fz}{\partial z} dx\, dy\, dz\right)$ என்பன நிறை உயர்வைத் தருக்கின்றன.

எனவே மொத்த நிறை உயர்வு

$$= - dx\, dy\, dz \left(\frac{\partial fx}{\partial x} + \frac{\partial fy}{\partial y} + \frac{\partial fz}{\partial z} \right)$$

ஆனல் *dx dy dz* என்பது இணைமுகப்பருபனின் பரும அளவைச் குறித்தலால், ஓரலகுப் பருமனில் நிறை உயர்வு வீதம்

$$- \left(\frac{\partial fx}{x} + \frac{\partial fy}{\partial y} + \frac{\partial fz}{\partial z} \right) = - \nabla \cdot \mathbf{F} \qquad (17.8)$$

ஆகும். ஆனல், ஓரலகுப் பருமனின் நிறை அடர்த்தியைக் கொடுக்குமாதலால்

$$\text{அடர்த்தி உயர்வு வீதம்} = - \nabla \cdot \mathbf{F} \qquad (17.9)$$

எனவே $\frac{d\rho}{dt} = - \nabla . F$

அல்லது $\nabla . F = -\frac{d\rho}{dt}$ .... (17.10)

இதனைத் தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு என்கிறோம். (Equation of Continuity). திரவம் இறுகு தன்மையற்றதாக (incompressible) இருந்தால் $\frac{d\rho}{dt} = 0$

எனவே இறுகு தன்மையற்ற பொருட்களுக்கு $\triangle . F = 0$ ஆகும்.

$\nabla . F$ என்பது அடர்த்திக் குறைவு வீதத்தை (எதிர்க் குறியிருப்பதால் குறைவு) கொடுப்பதால் பொதுவாகப் பொருட்கள் விரிவடையும் போதுஅடர்த்தி குறைதலைக் கருத்தில் கொண்டு இதனை வெக்டார் விரிவு என்கிறோம்.

18: வெக்டார் சுழிவு (Curl of a Vector)

இப்பகுதியில் ∇ என்ற வெக்டார், F என்ற வெக்டார் ஆகியவற்றின் வெக்டார் பெருக்கற்பலனைக் (Vector product) காண்போம். F என்பது ஒரு வெக்டார் இடச் சார்பு F (x, y, z) என்போம்.

$$F = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18.1)$$

எனவே $\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial_x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial_y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial_z} \vec{k} \right) \times$

$$\left(+ f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18.2)$$

சமன்பாடு (8.5) முதல் (8.9) வரை உள்ளவற்றைப் பயன்படுத்தி எழுதினோமானால்

$$\nabla \times F = \vec{i} \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right)$$

$$+ \vec{k} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial f y} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18.3)$$

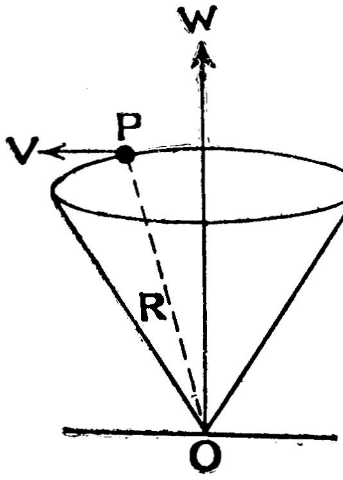
$$\therefore \quad \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18.4)$$

இந்தப் பெருக்கற்பலன் ஒரு வெக்டார் என அறிவோம். $\nabla \times F$ என்பதனை F-ன் வெக்டார் சுழிவு (Curl F) என்போம். இதனைக் 'கர்ல் F' எனவும் குறிக்கலாம்.

எந்த ஒரு புள்ளியிலும் 'கர்ல் F' என்பது F என்ற வெக்டார் சார்பு எந்த அளவுக்கு அந்தப் புள்ளியைச் சூழ்ந்துள்ளது என அளந்தறிய உதவும். காட்டாக, மின்னோட்டம் செல்லும் கம்பியைச் சுற்றியுள்ள காந்தப் புலத்தைக் கூறலாம். F என்பது காந்தப்புல வலிமையைக் குறிக்கும் வெக்டாரானால் $\nabla \times F$ என்ற F-ன் சுழிவு மின்னோட்ட வலிமைக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும்.

இச் சுழிவு வெக்டாரின் தன்மையைப் பின்வரும் சுழற்சி இயக்கத்தைக் கொண்டும் விளக்கமாகக் கூறலாம்:

நிலையான அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து மாறாத எண்மதிப்பு கொண்ட W என்ற கோணத்திசை வேகத்துடன் ஒரு பொருள் சுழன்று கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். (படம் 21) இத்தகைய சுழற்சியை W என்ற வெக்டார் குறிக்கும். இதன் திசை,



படம் 21

அந்தச் சுழற்சியால் வலம்புரித்திருகு (Right handed Screw) முன்னேறும், திசையைக் குறிக்கும். இந்நிலையில் P என்ற அச்சுக் கோட்டில் இல்லாத ஏதேனுமொரு புள்ளி, அச்சுக் கோட்டை மையமாகக் கொண்டு அச்சுக் கோட்டிற்கு நேர்க்குத்தான ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும். இந்தப் புள்ளி, அச்சுக்கோட்டின் மீதுள்ள O-என்ற ஏதேனுமொரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட R என்ற வெக்டாரால் குறிக்கப்பட்டால் P என்ற புள்ளியின் கோட்டுத் திசை வேகத்தின்) (linear velocity) மதிப்பு

$$|V| = |W|\ |R|\ \sin\theta \text{ ஆகும்} \qquad (18.5)$$

இதனை வெக்டார் பெருக்கலாக எழுதினால்

$$V = W \times R \qquad (18.6)$$

எனக் கிடைக்கும்.

இப்போது V-யின் சுழிவைக் காண்போம்.

$$\nabla \times V = \nabla \times (W \times R) \ldots\ldots\ldots \qquad (18.7)$$

சமன்பாடு (10.18)-ன் படி

$$\nabla \times (W \times R) = W(\nabla\cdot R) - R(\nabla\cdot W)$$

ஆதலால் $$\nabla \times V = W(\nabla\cdot R) - R(\nabla\cdot W) \qquad (18\cdot8)$$

இப்போது $$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (18\cdot9)$$

என்ற இடத்தைக் குறிக்கும் வெக்டாரானல் (Position Vectoı)

$$V\cdot R = \left(\frac{\partial}{\partial_x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial_y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial_z}\vec{k}\right)\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$= \frac{\partial x}{\partial_x} + \frac{\partial y}{\partial_y} + \frac{\partial z}{\partial_z} = 3$$

எனவே, $$\nabla\cdot R = 3 \qquad (18\cdot10)$$

சமன்பாடு (18.8)-ல் $R(\nabla\cdot W)$ என்பதை $(\nabla.W)R$ எனவும் எழுதலாம். ($(\nabla.W)$ என்பது ஒரு ஸ்கேலாராதலால்).

ஆனால், $\nabla\cdot W = W\cdot\nabla$ ஆதலால்,

$$R(\nabla\cdot W) = (W\cdot\nabla)R \qquad (18.11)$$

$W = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$ எனக் கொண்டால், சமன்பாடு (18.11)-ல்

$$R(\nabla.W) = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) R \quad (18\cdot12)$$

இதில் சமன்பாடு (18·9)-ஐப் பயன்படுத்தினுல் லிருந்து,

$$R(\nabla.W) = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$ எனக் கிடைக்கிறது எனவே

$$R(\nabla\cdot W) = W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18\cdot13)$$

எனவே, சமன்பாடு (18·8)-ல் (18·10), (18·13) ஆகிய சமன் பாடுகளைப் பிரதியிட்டால்

$$\nabla \times V = W(\nabla\cdot R) - R(\nabla\cdot W)$$
$$= 3W - W = 2W$$

எனவே, $\nabla \times V = 2W \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18\cdot14)$

எனவே கோட்டுத் திசைவேகத்தின் சுழிவு கோணத் திசை வேகத்தைப் போல் இரு மடங்குள்ளது.

19. செயற்குறி அல்லது செயலி ∇ (Operator ∇)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19\cdot1)$$

என்ற வெக்டார் செயற்குறியைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் தொடர்புகளைக் கண்டோம் :

$$\text{வாட்டம் } \phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \ldots\ldots \ldots \quad (19.2)$$

$$\text{டைவ் } F = \nabla\cdot F = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19\cdot3)$$

$$\text{கர்ல் } F = \nabla\times F = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\vec{j}$$
$$+ \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19\cdot4)$$

இப்பகுதியில் மேலும் சில எளிய தொடர்புகளைக் காண்போம்.

$$\nabla\times\nabla\phi = \nabla\times\left\{\frac{\partial\phi}{x\partial}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right\}$$

$\nabla\phi = F = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$ என்ற வெக்டாராகக் கொண்டால்,

$$f_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,;\ f_y = \frac{\partial\phi}{\partial y};\ f_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$ ஆகும்.

எனவே,

$$\nabla\times F = \nabla\times\nabla\phi = \left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial y}\right\}\vec{i} + \left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial z}\right\}\vec{j} + \left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x}\right\}\vec{k} \ldots\ldots\ldots \quad (19\cdot5)$$

ஆனல், சமன்பாடு (19•5)-ல் அடைப்புக்குள் உள்ள கோவைகள் தனித்தனியே சுழியாதலால்,

$$\nabla\times F = \nabla\times\nabla\phi = 0\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19\cdot6)$$

எனவே, F என்ற வெக்டார் சார்பு, ϕ என்ற ஸ்கேலார் சார்பின் வாட்டமாக இருந்தால் $\nabla\times F = 0$.

இப்போது $\nabla\,.(\nabla\times F)$-ன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$\nabla\cdot(\nabla\times F) = \nabla\cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19\cdot7)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial fz}{\partial y} - \frac{\partial fy}{\partial z}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial fx}{\partial z} - \frac{\partial fz}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right\}$$

அடைப்புக்களை நீக்கி எழுதினேமானல், வலப்புறம் சுழி யாவதைக் காணலாம். எனவே

$$\nabla\cdot(\nabla\times F) = 0 \quad (19\cdot8)$$

சமன்பாடு (19•8), F என்ற எந்த வெக்டாருக்கும் பொருந்துவதாகும்.

மேலும்,

$$\Delta\cdot\Delta\phi = \left\{\frac{\partial}{}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right\}\cdot\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial\phi}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{\ }\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

இதனை $\nabla^2 \phi$ எனக் குறிப்போம். எனவே,

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19 \cdot 9)$$

சமன்பாடு (19·9) லிருந்து

$$\nabla^2 = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \qquad (19 \cdot 10)$$

என எழுதலாம். இது ஒரு செயற்குறியாகும் (Operator). இதனை லாப்லாஸ் செயற்குறி (Laplacian Operator) எனக் கூறுகிறோம்.

இதே முறையில் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை விரித்தெழுது வதன் மூலம் மெய்ப்பிக்கலாம்.

$$\nabla \cdot (\phi F) = \phi (\nabla \cdot F) + \nabla \phi \cdot F \ldots\ldots\ldots \qquad (19 \cdot 11)$$

$$\nabla \times (\phi F) = \phi (\nabla \times F) + \nabla \phi \times F \ldots\ldots\ldots \qquad (19 \cdot 12)$$

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla (\nabla \cdot F) - \nabla^2 F \ldots\ldots\ldots \qquad (19 \cdot 13)$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = (\nabla \times A) \cdot B - A \cdot (\nabla \times B) \ldots\ldots\ldots \qquad (19 \cdot 14)$$

$$\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - (\nabla \cdot A) B + (B \cdot \nabla) A - (A \cdot \nabla) B \ldots\ldots \qquad (19 \cdot 15)$$

$$\nabla (A \cdot B) = (A \cdot \nabla) B + (B \cdot \nabla) A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) \ldots\ldots\ldots \qquad (19 \cdot 16)$$

இவற்றுள் ϕ என்பது ஒரு ஸ்கேலாரையும், F,A,B என்பன வெக்டார்களையும், $\nabla^2 F$ என்பது $[(\nabla^2 f_x)\vec{i} + (\nabla^2 f_y)\vec{j} + (\nabla^2 f_z)\vec{k}]$ என்பதையும், $(A \cdot \nabla)$ என்பது $\left\{ a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ என்ற செயற்குறியையும் குறிப்பிடுவன.

இப்போது கோட்டுத் தொகுப்பு (line integral) என்ற பகுதியில் சமன்பாடு (13·4)-ஐ மீண்டும் காண்போம்.

$$\int_A^B F \cdot dR = \int_A^B (F_x \, d_x + F_y \, d_y + F_z \, d_z) \qquad (19.17)$$

இதில் F என்ற வெக்டார் ϕ என்ற ஸ்கேலார் சார்பின் வட்ட மாக இருந்தால் $F = \nabla \phi$ (19.18)

ஆனால், $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ ஆதலால்.

$$F_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,; \quad F_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}\,; \quad F_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ ஆகும்.} \qquad (19{\cdot}19)$$

எனவே.
$$\int_A^B F{\cdot}dR = \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz\right) \qquad (19{\cdot}20)$$

இச்சமன்பாட்டில் வலப்புறம் $\int_A^B d\phi$-க்குச் சமமாதலால்,

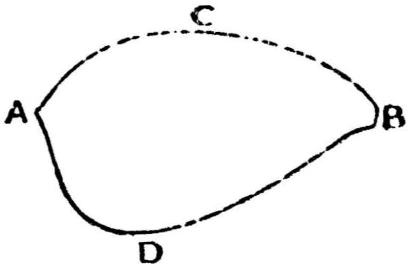
$$\int_A^B F{\cdot}dR = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A \qquad (19{\cdot}21)$$

இச்சமன்பாடு A-யிலிருந்து B-வரை $(F{\cdot}\partial R)$ -ன் கோட்டுத் தொகுப்பைத் தருகிறது. எனவே, தொடங்கிய புள்ளியிலேயே முடிவுறும் ஒரு கோட்டின் வழியே எடுக்கப்படும் கோட்டுத் தொகுப்பு, ($\phi = \phi$ ஆதலால்)

$$\oint F \cdot dR = \phi_B - \phi_A = 0 \text{ ஆகும்.} \qquad (19.22)$$

$\oint$ என்ற குறியீடு, தொடங்கிய இடத்திலேயே முடிறுவும் ஒரு கோட்டின் வழியே எடுக்கும் கோட்டுத் தொகுப்பைக் குறிக்கிறது.

இப்போது மேற்கூறியவாறு தொடங்கிய இடத்திலேயே முடிவுறும் ஓர் வளைவு பாதையின் வழியே எடுக்கப்படும் கோட்டுத்



படம் 22

தொகுப்பு $\oint F{\cdot}dR$, சுழியானால், F என்பது ϕ என்ற ஏதேனுமொரு ஸ்கேலார் சார்பின் வாட்டமாக இருக்க வேண்டு மெனக் காட்டு.

ADBCA என்பது நாம் எடுத்துக் கொண்ட வளைகோடு என்போம். (படம் 22). இதனை ADB, BCA என்ற இரு பகுதி களாகப் பிரிக்கலாம். இப்போது

$$\oint \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = \int_{ADB} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} + \int_{BCA} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} \qquad (19\cdot23)$$

ஆனால், $\int_{BCA} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = -\int_{ACB} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R}$ ஆதலால்,

$$\oint \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = \int_{ADB} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} - \int_{ACB} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} \qquad (19\cdot24)$$

$\oint \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R}$ சுழியானால் சமன்பாடு (19·24)-லிருந்து

$$\int_{ADB} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = \int_{ACB} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} \qquad (19\cdot25)$$

எனவே, A-யிலிருந்து B-வரை F-ன் கோட்டுத் தொகுப்பை எடுக்கும்போது, அதன் மதிப்பு தொகுப்பு எடுக்கப்படும் பாதை யைப் பொருத்து மாறுபடுவதில்லை. எப்போதும் அது A, B என்ற இரு புள்ளிகளை பட்டுமே பொறுத்த சார்பாக இருக்க வேண்டும். இச் சார்பினை ϕ எனக் கொண்டால்,

$$\int_{A}^{B} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = \phi_B - \phi_A \text{ என எழுதலாம்.} \qquad (19\cdot26)$$

இப்போது A, B என்ற புள்ளிகள் மிக அருகில் உள்ளனவாகக் கொண்டால் $\phi_B - \phi_B = d\phi$ என எழுதலாம். எனவே,

$$\int_{A}^{B} \mathrm{F}\cdot \overset{A}{d}\mathrm{R} = d\phi \qquad (19\cdot27)$$

A, B ஆகியவை மிக அருகாமையில் உள்ள இரு புள்ளிக ளாதலால் dR என்பது AB என்ற கோட்டை முழுவதும் குறிப்ப தாகக் கொள்ளலாம். அப்போது;

$$\int_{A}^{B} \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = \mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = d\phi \qquad (19\cdot28)$$

சமன்பாடு (16·5)-ன்படி $d\phi = \nabla\phi\cdot d\mathrm{R}$ ஆதலால்,

$$\mathrm{F}\cdot d\mathrm{R} = \nabla\phi\cdot d\mathrm{R},$$

அல்லது $$(\mathrm{F}-\nabla\phi)\cdot d\mathrm{R} = 0 \qquad (19\cdot29)$$

சமன்பாடு (19·29) எல்லாத் திசைகளுக்கும் (dR-ன்) பொருந்த வேண்டுமாதலால் $d\mathrm{R} \neq 0$,

எனவே, $F-\nabla\phi = 0$

அல்லது $F = \nabla\phi$ (19·30)

எனவே, F என்பது ϕ என்ற ஸ்கேலாரின் வாட்டமாக இருக்க வேண்டும்.

F என்பது $\nabla\phi$ - ஆக இருந்தால் சமன்பாடு (19·6)-ன் படி $\nabla\times F = \nabla\times\nabla\phi = 0$ ஆகும். எனவே, F-ன் சுழிவு, சுழியாகும். $F = \nabla\phi$ என்பதை சுழற்சியிலா வெக்டார் இடச்சார்பு (irratational vector function of position) எனக் கூறுகிறோம்.

20. சில எளிய பயிற்சிகள் (Exercise)

வெக்டார் தொகுநியாக்கம், வெக்டார் பகுநியாக்கம் ஆகியவற்றில் சில விளக்கக் கணக்குகளையும், பயிற்சிகளையும் இப்பகுதியில் காண்போம்.

விளக்கக் கணக்கு (1) :

$R = \text{Sin}\, t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j} + t\, \vec{k}$ என்ற வெக்டாரானால், $(a)\ \frac{dR}{dt}$; $(b)\ \frac{d^2R}{dt^2}$; $(c)\ \left|\frac{dR}{dt}\right|$; $(d)\ \left|\frac{d^2R}{dt^2}\right|$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

$$(a)\ \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t)\,\vec{i} + \frac{d}{dt}(\cos t)\,\vec{j} + \frac{d}{dt}(t)\,\vec{k}$$

$$= \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$(b)\ \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}(\text{Cos}\, t)\,\vec{i} - \frac{d}{dt}(\text{Sin}\, t)\,\vec{j}\ \frac{d}{dt}(1)\,\vec{k}$$

$$= -\text{Sin}\, t\,\vec{i} - \text{Cos}\, t\,\vec{j}$$

$$(c)\ \left|\frac{dR}{dt}\right| = \sqrt{\text{Cos}^2 t + (-\sin t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$(d)\ \left|\frac{d^2R}{d+2}\right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\text{Cos}\, t)^2}$$

$$= 1$$

விளக்கக் கணக்கு (2) : ஒரு வளைகோடு C-யின் மீதுள்ள ஓர் நிலையான புள்ளியிலிருந்து, அவ்வளைகோட்டின் வழியே அதன் நீளம் s ஆனல், C என்ற வளைகோட்டைப் பின்வரும் பாராமீட்டர் (Parametric) சமன்பாடுகள் குறிக்கின்றன; $x = x(s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$. C யின் மீதுள்ள புள்ளியின் இடங் குறிக்கும் வெக்டார் (Position Vector) R ஆனல், $\frac{dR}{ds}$ என்ற வெக்டார் C-க்குத் தொடு கோடாயுள்ள ஓர் அலகு வெக்டார் எனக் காட்டுக.

$$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$ ஆதலால்,

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

இது $x = x(s)$; $y = y(s)$; $z = z(s)$ என்ற கோட்டிற்குத் தொடு கோடாக இருக்கும். [சமன்பாடு (11.5) உடன் ஒப்பிடுக.]

இத் தொடு கோடு வெக்டாரின் எண் மதிப்பு

$$\left|\frac{dR}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2}}$$

$$= 1.$$

ஏனெனில் நுண்கணித முறைப்படி

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ஆகும். எனவே $\frac{dR}{dt}$ என்பது C-க்குத் தொடு கோடாயமைந்த ஓர் அலகு வெக்டாராகும்.

விளக்கக் கணக்கு (3) : A என்பது ஒரு வெக்டாரையும் a என்பது அதன் எண்மதிப்பையும் குறித்தால்

$$A \cdot \frac{dA}{dt} = a\frac{da}{dt}$$ எனக் காட்டு.

$A \cdot A = a^2$ ஆதலால்

$$\frac{d}{dt}(A \cdot A) = \frac{d}{dt}(a^2) = 2a\frac{da}{dt} \qquad (20.1)$$

ஆனல், $$\frac{d}{dt}(A \cdot A) = A \cdot \frac{dA}{dt} + \frac{dA}{dt} \cdot A$$

$$= 2A \cdot \frac{dA}{dt}$$

எனவே $2\,\mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = 2a\dfrac{da}{dt}$

$$= \quad \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = a\,\frac{da}{dt} \qquad (20.2)$$

விளக்கக் கணக்கு (4) :

$\mathbf{A} = (2xy - x^3)\,\vec{i}_y + (\epsilon^y - \sin x)\,\vec{j} + x\cos y\,\vec{k}$ ஆனால்,

$\dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x}$ எனக் காட்டு.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - x^3)\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}\ (\epsilon^y - \sin x)\,\vec{j}$$

$$= \frac{d}{dx}(x\cos y)\,\vec{k}$$

$$= (2y - 3x^2)\,\vec{i} - \cos x\,\vec{j} + \cos y\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\ (2y - 3x^2)\,\vec{i} - \frac{\partial}{\partial y}\ (\cos x + \vec{j})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(\cos y)\,\vec{k}$$

$$= 2\,\vec{i} - \sin y\,\vec{k}$$

மேலும், $\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\ (2xy - x^3)\,\vec{i} + \dfrac{d}{dy}\ (e^y - \sin x)\,\vec{j}$

$$= \frac{d}{dy}\ (x\cos y)\ \vec{k}$$

$$= 2x\,\vec{i} + \epsilon^y\,\vec{j} - x\sin y\ \vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\ (2x)\vec{i} + \frac{d}{dx}(e^y)\,\vec{j} - \frac{d}{dx}\ (x\sin y)\vec{k}$$

$$= 2\,\vec{i} - \sin y\,\vec{k}$$

எனவே $\frac{\partial^2 A}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y\, dx}$ ஆகும். இப்பண்பு சென்ற பகுதியில் $\nabla \times \nabla \phi = O$ எனவும்

$\nabla \cdot (\nabla \times F) = O$ எனவும் காட்டுவதற்குப் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளதை அறிவோம். (சமன்பாடுகள் *19.6, 19.8*).

விளக்கக் கணக்கு (5) : a, b என்பன வேறுபடுத்தக் கூடிய (differentiable) ஸ்கேலார் சார்புகளானால் $(x, y, z$ -ன்) $\Delta (ab) = b \nabla a + a \nabla b$ எனக்காட்டு.

$$\nabla (ab) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(ab)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(ab)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(ab)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(ab)\vec{k}$$

$$= \left(a\frac{\partial b}{\partial x} + b\frac{\partial a}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(a\frac{\partial b}{\partial y} + b\frac{\partial a}{\partial y}\right)\vec{j}$$

$$+ \left(a\frac{b\partial}{\partial z} + b\frac{\partial a}{\partial z}\right)\vec{k}$$

எனவே,

$$\nabla (ab) = a\left\{\frac{\partial b}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial b}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial b}{\partial z}\vec{k}\right\}$$

$$+ b\left\{\frac{\partial a}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k}\right\}$$

$$\therefore \quad \nabla (ab) = a\nabla b + b\nabla a \qquad (20{\cdot}3$$

விளக்கக் கணக்கு (6): $\nabla \phi$ என்பது $\phi\,(x,y,z) =$ மாறிலி என்ற பரப்புக்கு நேர்குத்தான வெக்டார் எனக் காட்டுக.

அப் பரப்பின் ஏதேனுமொரு புள்ளி (x,y,z)-ன் இடங்குறிக்கும் வெக்டார் (position vector) R என்போம்.

அவ்வாருனல், $\quad R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$

அப்போது $dR = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$ என்பது அப்புள்ளியில் அப் பரப்பிற்குத் தொடுகோடான ஒரு வெக்டாராகும். ஆனால்,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} d_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} d_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} d_z = 0 \text{ ஆகும்.} \qquad (2.06)$$

(ϕ = மாறிலி என்பதால்)

இப்போது $\nabla\phi \cdot d\text{R} = \left(\frac{x\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x} d_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} d_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} d_z$$

ஆதலால், சமன்பாடு (20·4)-லிருந்து $\nabla\phi \cdot d\text{R} = 0$ ஆகும். எனவே, $\nabla\phi$ என்பது $d\text{R}$-க்கு நேர்க்குத்தானது. அதாவது $\nabla\phi$, ϕ என்ற பரப்புக்கு நேர்க்குத்தானது.

விளக்கக் கணக்கு (7)

$\triangle^2\left(\frac{1}{\text{r}}\right) = 0$ எனக் காட்டு.

$\text{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்றால்,

$\text{r} = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ ஆகும். எனவே,

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\text{r}}\right) = \left(\frac{\partial^2}{x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_1^2+y^2+z^2) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad (20\cdot5)$$

அதேபோன்று

$$\frac{\partial_2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

எனவே, (20·5), (20·6), (20·7) என்ற சமன்பாடுகளைக் கூட்ட,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=0.$$

$$\text{எனவே, } \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0 \qquad (20.8)$$

[$\nabla^2\phi=0$ என்பது லாப்லாஸ் சமன்பாடு எனப்படும். $\phi=\frac{1}{r}$ என்பது இச் சமன்பாட்டிற்கான ஒரு தீர்வு (solution) என்பது தெளிவு.]

விளக்கக் கணக்கு (8):

$$\nabla\cdot E=0;\ \nabla\cdot H=0;\ \nabla\times E=-\frac{\partial H}{\partial t};\ \nabla\times H=\frac{\partial E}{\partial t}$$

என்ற சமன்பாடுகள் E, H என்ற வெக்டார்களுக்குப் பொருந்துவன வானல், E-யும் H-ம், $\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கான தீர்வுகளெனக் (Solutions) காட்டுக.

$$\nabla\times E=-\frac{\partial H}{\partial t} \text{ ஆதலால்,}$$

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla\times\left(-\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times H)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$\text{எனவே, } \nabla\times(\nabla\times E)=-\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (20\cdot9)$$

சமன்பாடு (19·13)-ன்படி,

$$\nabla\times(\nabla\times E)=\nabla(\nabla\cdot E)\ \nabla^2 E \text{ ஆனல்,}$$

$$\nabla\cdot E=0 \text{ ஆதலால் } \nabla\times(\nabla\times E)=-\nabla^2 E \qquad (20\cdot10)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (20·9), (20·10) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$\nabla^2 E=-\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (20\cdot11)$$

இதேபோல்,

$$\nabla\times(\nabla\times H) = \nabla\times\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times E) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

எனவே

$$\nabla\times(\nabla\times H) = -\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

ஆனல், $\nabla \times (\nabla\times H) = \nabla(\nabla\cdot H) - \nabla^2 H$

$$= -\nabla^2 H \quad (\because \nabla\cdot H = O)$$

எனவே $$\nabla^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \qquad (20.12)$$

எனவே *(20.11)*, *(20.12)* என்ற சமன்பாடுகள், E, H என்பன $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கான தீர்வுகள் எனக் காட்டுகின்றன.

[இக் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் மின்காந்தக் கொள்கைக்கான மேக்ஸ்வெல் சமன்பாடுகளை (Maxwell's equations of Electromagnetic theory) ஒத்தவை. $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ அல்லது $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ என்ற சமன்பாடு அலைச் சமன்பாடு (wave equation) எனப்படும்.

விளக்கக் கணக்கு *(9)*: $\int A\times\frac{d^2 A}{dt^2}\,dt$ என்பதைக் கணக்கிடு.

$$\frac{d}{dt}\left(A\times\frac{dA}{dt}\right) = A\times\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{dA}{dt}\times\frac{dA}{dt}$$

ஆனல், $\frac{dA}{dt}\times\frac{dA}{dt} = O$ ஆகும். $(\theta = O$ ஆதலால்).

எனவே $A\times\frac{d^2A}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(A\times\frac{dA}{dt}\right)$

$$\therefore \int A\times\frac{d^2A}{dt^2}\,dt = \int\frac{d}{dt}\left(A\times\frac{dA}{dt}\right)$$
$$= A\times\frac{dA}{dt} + C \text{ ஆகும்.}$$

இதுவே $\int A \times \frac{d^2A}{dt^2} dt$ யின் மதிப்பாகும். C என்பது தொகை மாறிலி வெக்டார் (Integration Constant).

விளக்கக் கணக்கு (10) : $A = \left\{(6x+3)\vec{i} - 14y\vec{j} + 21z^2\vec{k}\right\}$ என்ற வெக்டாருக்கு, (0, 0, 0) என்ற புள்ளியிலிருந்து (1, 1, 1) என்ற புள்ளி வரை C என்ற பாதையின் வழியே $\int_C A \cdot dR$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு.

C என்பது பின்வரும் சமன்பாடுகளால் குறிக்கப்படும் :

$$x = t;\ y = t^2;\ z = t^3.$$

C-யின் வழியே,

$$A = \left\{(6t+3)\vec{i} - 14t^2\vec{j} + 21t^6\vec{k}\right\} \qquad (20.13)$$

$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ஆதலால்

$R = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ ஆகும்

$$\text{எனவே}\quad dR = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t\,\vec{k} \qquad (20.14)$$

மேலும், (0, 0, 0) என்ற புள்ளியில் t = 0 ஆகும்.

(1, 1, 1) என்ற புள்ளியில் t = 1 ஆகும்.

எனவே சமன்பாடுகள் (20.13), (20.14).ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\int_C A \cdot dR = \int_{t=0}^{1} \left\{(6t+3)\vec{i} - 14t^2\vec{j} + 21t^6\vec{k}\right\} \times \left\{\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right\}$$

$$= \int_0^1 (6t+3) - 28t^3 + 63t^8$$

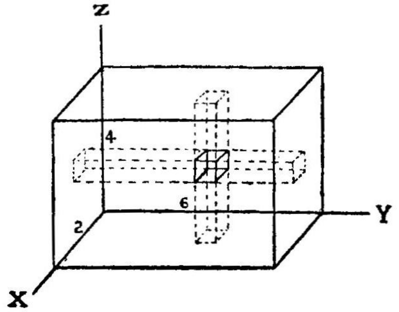
$$= \left[\frac{6t^2}{2} + 3t - \frac{28t^4}{4} + \frac{63t^9}{9}\right]^1$$

$$= (3 + 3 - 7 + 7) = 6$$

எனவே $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} = 6$ ஆகும்.

விளக்கக் கணக்கு (11) : $\mathbf{F} = 2xz\,\vec{i} - x\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$ என்பது ஒரு வெக்டார். $x = 0; y = 0; z = 0; x = 2; y = 6; z = 4$ என்ற பரப்புக்களுக்குள் அடங்கிய V என்ற பருமனில் $\int_V \mathbf{F}\, dv$-ன் மதிப்பினைக் கணக்கிடு.

$dV = dx\, dy\, dz$ என்ற சிறு பருமனை எடுத்துக் கொள்வோம். (*a*) முதலில் x, y ஆகியவற்றை நிலையாக வைத்துக் கொண்டு $z = 0$



படம் 23

விலிருந்து $z = 4$ வரை தொகு ஆக்கம் காண்போம். (*b*) பின்னர், x-ஐ நிலையாக வைத்துக் கொண்டு $y = 0$ விலிருந்து $y = 6$ வரை தொகு ஆக்கம் காண்போம். (*c*) இறுதியாக $x = 0$ முதல் $x = 2$ வரை தொகு ஆக்கம் காண்கிறோம்.

இவ்வாறு V என்ற பருமன் முழுவதையும் தொகு ஆக்கத்துள் கொணர்கிறோம்.

$$\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=0}^{4} (2xz\,\vec{i} - x\,\vec{j} + y^2\,\vec{k})\, dx\, dy\, dz$$

$$= \vec{i} \int_0^2 \int_0^6 \int_0^4 2XZ\, dz\, dy\, dz - \vec{j} \int_0^2 \int_0^4 \int_0^6 X\, dx\, dy\, dz$$

$$+\int_0^2 \int_0^6 \int_0^4 y^2 \, dx \, dy \, dz.$$

$$= \vec{i}\int_0^2 \int_0^6 16X \, dx \, dy - \vec{j}\int_0^2 \int_0^6 4X \, dx \, dy$$

$$+ \vec{k}\int_0 \int_0 4Y^2 \, dx \, dy.$$

$$= \vec{i}\int_0^2 96 \, X \, dx - \vec{j}\int_0^2 24X \, dx + \vec{k}\int_0^2 288 \, dx$$

$$= 192\,\vec{i} - 48\,\vec{j} + 576\,\vec{k}$$

எனவே $\int_V F \, dv = 192\,\vec{i} - 48\,\vec{j} + 576\,\vec{k}$ ஆகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள் (Exercises) :

(1) A என்ற வெக்டார் நிலையான எண்மதிப்புக் கொண்டதானல், A-யும், $\frac{dA}{dt}$ யும், $\left|\frac{dA}{dt}\right| \neq 0$ எனும் போது ஒன்றுக் கொன்று நேர்க்குத்தானவை எனக் காட்டுக.

(2) a, b என்பன பகுநியாக்கக் கூடிய (differentiable) ஸ்கேலார் சார்புகளானல் $\nabla (a + b) = \nabla a + \nabla b$ எனக்காட்டு.

(3) A (a, b, c) என்ற புள்ளியிலிருந்து P (x, y, z) என்ற ஏதேனுமொரு புள்ளியின் தொலைவு r ஆனல், ∇r என்பது $\overrightarrow{AP}$ என்ற திசையில் ($\overrightarrow{AP} = R$ என்ற வெக்டாரின் திசையில்) ஓர் அலகு வெக்டார் எனக்காட்டு.

4. $\nabla \times A = 0$ ஆனல், $\nabla \cdot (A \times R)$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு

5. $\nabla \times F = 0$ என்றல், F என்பது சுழற்சியிலா வெக்டார் சார்பு

(Irratational vector function) என்கிறோம். $\vec{F} = (x+2y+az)\vec{i}$ $(bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}$ என்பது சுற்றிலா வெக்டார் சார்பெனின் a, b, c, ஆகிய வற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

6. ஒரு துகளை $F = 3xy\,\vec{i} - 5z\,\vec{j} - 10x\,\vec{k}$ என்ற விசைப் புலத்தில் (Force field), $x = t^2+1$; $y = 2t^2$; $z = t^3$ என்ற வளை கோட்டின் வழியே $t = 1$ முதல் $t = 2$ வரை கொண்டு செல்லத் தேவையான மொத்தப் பணியைக் கணக்கிடு.

7. $F = 3xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j}$ ஆனல், X–Y தளத்தில் C என்ற $y = 2x^2$ என்ற சமன்பாடு கொண்ட வளைகோட்டின் வழியே $(0,0)$-விலிருந்து $(1,2)$ வரை $\int_C F \cdot dR$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

8. F என்பது $(4xz\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k})$ என்ற வெக்டாரையும் N என்பது செங்கோடு அல்லது இயல்புக் கோட்டின் (normal) திசையில் அலகு வெக்டாரையும் குறித்தால், $x=0$; $x=1$; $y=0$; $y=1$; $z=0$; $z=1$ என்ற பரப்புக்கள் கொண்ட கனசதுரத்தின் பரப்பு S-ல் $\iint_S F \cdot N\, ds$-ன் மதிப்பினைக் கணக்கிடு.

9. V என்பது $z = 4 - x^2$ என்ற உருளை $x = 0$; $y = 0$; $y = 2$; $z = 2$; $z = 0$ என்ற தளங்கள் ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட பருமன் எனில், $\iiint_V (2x+y)\, dv$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு.

10. ஒரு புள்ளியின் இடங்குறிக்கும் வெக்டார் R ஆனல், $\nabla r^n = n\, r^{n-2} R$ எனக் காட்டு. $R = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ எனக் கொள்க.

10. $v^2 = u^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{s}$ எனக் காட்டு.

21. காஸ் தேற்றம் (Gauss' theorem)

உரை : V என்ற ஏதேனுமொரு பருமனில், F என்ற வெக்டார் புலத்தின் விரிவின் பருமத் தொகுதி (Volume Integral of Divergence), அதே பருமனைச் சூழ்ந்துள்ள மூடிய பரப்பு S-ல் எடுக்கப் படும் F-ன் பரப்புத் தொகுதிக்குச் (Surface Integral) சமமாகும். அதாவது குறியீட்டு முறையில்

$$\iiint_V \nabla\cdot F\, dv = \iint_S F\cdot ds \qquad (21\cdot 1)$$

இதில் dv = dx dy dz என்பது V-ன் ஒரு சிறு பருமப் பகுதியைக் குறிக்கும். மேலும் dS என்பது இயல்புக்கோடு (Normal); நாம் கொண்டுள்ள மரபுப்படி (பகுதி 14) குறியையுடைய பரப்பின் சிறு பகுதியைச் குறிக்கும் வெக்டாராகும். எனவே N என்பது dS என்ற பரப்பிற்கு வெளி நோக்கிய இயல்புக் கோட்டின் திசையில் ஓர் அலகு வெக்டாரானுல் dS = N ds என எழுதலாம். (ds என்பது dS-ன் எண்மதிப்பு)

இத் தேற்றத்தின் உட் பொருள் யாதெனில், தொகை காண் உறுப்பு (Integrand) ஒரு வெக்டாரின் விரிவாக இருந்தால், பருமத் தொகுநியின் மதிப்பு அப் பருமனைக் கொண்டுள்ள சுற்றுப் பரப்பில் அவ் வெக்டாரின் மதிப்புக்களை மட்டுமே பொறுத்தது என்பதாகும். பருமனுள் உள்ள மற்ற புள்ளிகளில் அவ் வெக்டாரின் மதிப்பைப் பொறுத்துப் பருமத் தொகை மாறுவதில்லை.

தேற்றத்தை மெய்ப்பித்தல் :

$$\iiint_V \nabla\cdot F\, dv = \iiint_V \left\{\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz$$

$$\iiint_V \nabla\cdot F\, dv = \iiint_V \frac{\partial f_x}{\partial x} dxdydz + \iiint_V \frac{\partial f_y}{\partial y} dx\, dy\, dz$$

$$+ \iiint_V \frac{\partial f_x}{\partial z} dx\, dy\, dz \qquad (21\cdot 2)$$

வலது புறத்தில் முதல் தொகுநியை மட்டும்காண்போம். dy, dz என்ற குறுக்குப் பரப்புள்ள P_1P_2 என்ற சிறு பகுதியை மட்டும் கருத்தில் கொள்வோம். (படம் 24). P_1 என்பது (x_1, y, z) என்ற புள்ளியாகவும் P_2 என்பது (x_2, y, z) என்ற புள்ளியாகவும், P_1-ல் $d_y\, d_z = -ds_x$ எனவும் P_2-ல் $d_y\, d_z = ds_x$ எனவும்,கொள்வோம்.

$$\iiint_V \frac{\partial f_x}{\partial x} d_z\, d_y\, d_z = \iint_S f_x(x, y, z)\, d_y\, d_z$$

$$- \iint_S f_x(x_1, y, z)\, d_y d_z$$

$$= \iint_S f_x(x_2, y, z)\, ds_x + \iint_S f_x(x_1\, y, z)\, ds_x.$$

இதில் முதல் பரப்புத் தொகுநி S-ன் வலது பக்கத்திலும் இரண்டாவது S-ன் இடது பக்கத்திலும் எடுக்கப்படுகின்றன. எனவே, முழுப் பரப்பிலும் பரப்புத் தொகுநி காண்போமாயின்,

$$\iiint_V \frac{\partial f_x}{\partial x}\, d_x d_y d_z = \iint_S f_x\, ds_z \qquad (21\cdot3)$$

அதேபோல் $$\iiint_V \frac{\partial f_y}{\partial y}\, d_x\, d_y\, d_z = \iint_S f_y\, ds_y \qquad (21\cdot4)$$

$$\iiint_V \frac{\partial f_z}{\partial z}\, d_x\, d_y\, d_z = \iint_S f_z\, ds_z \qquad (21\cdot5)$$

(21·3), (21·4), (21·5) ஆகியவற்றின் கூட்டுத்தொகை

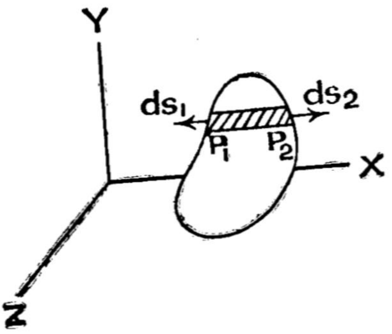
$$\iiint_V \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) d_x\, d_y\, d_z$$

$$= \iint_S (f_x\, ds_x + f_y\, ds_y + f_z\, ds_z)$$

$$\iiint_V \nabla\cdot F\, dv = \iint_S F\cdot ds \qquad (21\cdot6)$$

இதுவே காஸ் தேற்றமாகும்.

தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு : ஒரு மூடிய பரப்பினுள் அதன் வழியே செல்லும் பாய்பொருளின் திசைவேகம் V எனவும், அதன் அடர்த்தி ρ எனவும் கொள்வோம். இப்போது $F = \rho V$ என்றால், F-ன் பரப்புத்



படம் 24

தொகுநி அப்பரப்பின் வழியே 1 செகண்டில் செல்லும் பாய் பொருளின் நிறையைக் குறிக்கும். (பகுதி 14), இது அப் பருமனுள் நிறைக் குறைவு வீதத்தைக் (rate of decrease of mass) குறிப்பதால்

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv = \int_S F\cdot ds \qquad (21\cdot7)$$

காஸ் தேற்றப்படி $\int_S F\cdot ds = \int_V \nabla\cdot F\, dv$ ஆதலால்

$$-\int_V \frac{d\rho}{dt}\, dv = \int_V \nabla\cdot F\, dv$$

எனவே தொகுநி காண் உறுப்புக்கள் (Integrands) V-ன் மதிப்பு மிகக் குறைவாக உள்ளபோது, சமமாதல் வேண்டுமாதலால்,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot F \qquad (21\cdot8)$$

இதுவே தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு.

22. ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் (Stokes' theorem)

உரை : S என்ற பரப்பில் எடுக்கப்படும் F என்ற வெக்டார் புலத்தின் சுழிவின் பரப்புத் தொகுநி (Surface Integral of curl), அப்பரப்பின் வரம்புக் கோட்டில் எடுக்கப்படும் F-ன் கோட்டுத் தொகுநிக்குச் (Line Integral) சமம், அதாவது, குட்றியீடு முறையில்,

$$\iint_S \nabla\times F\cdot ds = \oint F\cdot dR \qquad (22\cdot1)$$

இதில் dR என்பது வரம்புக் கோட்டின் ஒரு சிறு பகுதியைக் குறிக்கும் வெக்டார். பரப்பின் நேர்க்குறியுடைய திசையில் திருகின் முனை முன்னேறத் திருகினைச் சுற்றவேண்டிய திசையில் dR இருந்தால் அது நேர்க்குறி கொண்டதாகவும், எதிர்த் திசையில் இருந்தால் அது எதிர்க்குறி கொண்டதாகவும் கொள்கிறோம்.

இத் தேற்றத்தின் உட்பொருள் வருமாறு : தொகுநி காண் உறுப்பு ஒரு வெக்டார் சுழிவாக இருந்தால், பரப்புத் தொகுநியின் மதிப்பு, அதன் வரம்புக் கோட்டில் வெக்டார் கொண்டுள்ள மதிப்பை மட்டுமே பொறுத்தது. எனவே, ஒரே வரம்புக் கோட்டைக் கொண்டுள்ள எல்லாப் பரப்புக்களுக்கும், பரப்புத் தொகுநிகள் சம மதிப்புக்களைக் கொண்டவை.

தேற்றத்தை மெய்ப்பித்தல் :

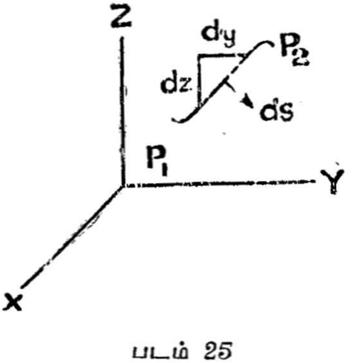
$$\nabla\times F=\left[\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial fz}\right)+\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\vec{j}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right] \qquad (22{\cdot}2)$$

எனவே, $\iint_S \nabla\times F\cdot ds=\iint_S [\;\ldots\ldots\;]\cdot(ds_x\,\vec{i}+ds_y\,\vec{j}+ds_z\,\vec{k})$

அதாவது,

$$\iint_S \nabla\times F\cdot ds=\iint_S\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}ds_y-\frac{\partial f_x}{\partial y}ds_z\right)$$
$$+\iint_S\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}ds_z-\frac{\partial f_y}{\partial z}ds_x\right)+\iint_S\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}ds_x-\frac{\partial f_z}{\partial x}ds_y\right) \qquad (22{\cdot}3)$$

S என்ற பரப்பில் YZ தளத்திற்கிணையான P_1P_2 என்ற பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம் (படம் 25). இதன் X-ஆயத்தொலைவு x என்போம். சமன்பாடு (22·3)-ல் வலப்புறம் முதல் தொகுப்பின் மதிப்பை P_1-லிருந்து P_2 வரை உள்ள சிறு பரப்பிற்குக் கணக்கிடு



படம் 25

வோம். P_1-லிருந்து P_2-க்குச் செல்லும்போது y, z இரண்டும் உயரும் வண்ணம் படம் வரையப்பட்டுள்ளது. dS என்ற படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள பரப்பிற்கு y-கூறு நேர்க்குறியுடையது; ஆனால் z-கூறு எதிர்க்குறியுடையது.

எனவே, $ds_y = d_x\,d_z;\; ds_z = -d_x\,d_y$ (21·4)

எனவே,

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_z}{\partial z} ds_y - \frac{\partial f_x}{\partial y} ds_z\right)$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} dz + \frac{\partial f_x}{\partial y} dy\right) dx \qquad (22{\cdot}5)$$

$P_1 P_2$ என்ற பகுதியில் x-மாறுவதில்லை யாதலால், $dx = 0$; எனவே,

$$df_x = \frac{\partial f_x}{\partial y} dy + \frac{\partial f_x}{\partial z} dz \qquad (22{\cdot}6)$$

எனவே சமன்பாடு (22·5)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} ds_y - \frac{\partial f_x}{\partial y} ds_z\right) = \int dx \int_{P_1}^{P_2} df_x$$

$$= \int f_x (x, y_2, z_2) - \int f_x (x, y_1, z_1)$$

இதில் $V_x (x, y_2, z_2)$ என்பது P_2 ல் f_x-ன் மதிப்பையும்

$V_x (x, y_1, z_1)$ என்பது P_1-ல் f_x-ன் மதிப்பையும் குறிப்பன.

P_1-ல் வரம்புக் கோட்டைக் குறிக்கும் திசை தாளிற்கு நேர் குத்தாக உள் நோக்கி இருக்கும் (dS படத்தில் உள்ளவாறு இருந்தால்). அதேபோல், P_2-வில் தாளுக்கு நேர்க்குத்தாக மேல் நோக்கி இருக்கும். எனவே, P_1-ல் $dx = -dr_x$. P_2-ல் $dx = +dr_x$ ஆகும்.

எனவே,

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} ds_y - \frac{\partial f_x}{\partial y} ds_z\right)$$

$$= \int f_x (x, y_2, z_2)\, dr_x + \int f_x(x, y_1, z_1)\, dr_x$$

முதல் கோட்டுத் தொகுநி வரம்புக் கோட்டின் வலப்புறமும், இரண்டாவது இடப்புறமும் எடுக்கப்படுகின்றன. எனவே, வரம்புக் கோடு முழுவதும் தொகுநி காண்போமானால்,

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} ds_y - \frac{\partial f_x}{\partial y} ds_z\right) = \oint f_x\, dr_x \qquad (22.7)$$

அதேபோல்,

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} ds_z - \frac{\partial f_y}{\partial z} ds_x\right) = \oint f_y\, dr_y \qquad (22.8)$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} ds_x - \frac{\partial f_z}{\partial x} ds_y\right) = \oint f_z \, dr_z \quad (22.9)$$

இம்மூன்றையும் கூட்டினால் சமன்பாடு (22.3)-லிருந்து

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = \oint f_x \, dr_x + f_y \, dr_y + f_z \, dr_z$$

எனவே,
$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot ds = \oint F \cdot dr \quad (22.10)$$

இதுவே, ஸ்டோக்ஸ் தேற்றமாகும்.

சிறப்புப் பண்பு: நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் பரப்பு மூடிய பரப்பாக இருந்தால், பரப்பின் வரம்புக் கோட்டின் தொகுதி சுழியாகும். எனவே, ஸ்டோக்ஸ் தேற்றப்படி

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot ds = 0 \quad (22.11)$$

எல்லா இடத்திலும் $\nabla \times F$ சுழியானால், F என்பது ஒரு ஸ்கேலார் இடச்சார்பின் வாட்டமாக (gradient) இருக்க வேண்டும்.

சுழற்சியிலா (irrotational) வெக்டார் என்பது எல்லா இடத்திலும் சுழிவு (curl) சுழியாகும் வெக்டாரைக் குறிக்கும். எனவே, எந்த ஒரு சுழற்சியிலா வெக்டாரும் ஒரு ஸ்கேலார் இடச்சார்பின் வாட்டமாக இருக்க வேண்டும். முன்பு நாம் கூறியபடி ஸ்கேலார் இடச்சார்பின் வாட்டம் ஒரு சுழற்சியிலா வெக்டார் என்பதன் மாறுதலையே இது.

23. கிரீன் தேற்றம் (Green's theorem):

V என்பதைப் பருமனுக்கும், S என்பதைப் பரப்புக்கும் மட்டுமே பயன்படுத்துவோமாதலால், பருமத் தொகுதியை $\int_V$ என்றும், பரப்புத் தொகுதியை $\int$ என்றும் குறிப்போம். காஸ் தேற்றப்படி,

$$\int_V \nabla \cdot F \, dv = \int F \cdot ds \quad (23 \cdot 1)$$

ϕ_1, ϕ_2 என்பன இரு ஸ்கேலார் இடச் சார்புகளெனக் கொண்டோமானால், $\phi_1 \nabla \phi_2$ என்பது ஒரு வெக்டாராகும், சமன்பாடு (23·1)-ல் $F = \phi_1 \nabla \phi_2$ எனக் கொண்டு பிரதியிட்டால்.

$$\int_V \nabla \cdot (\phi_1 \nabla \phi_2) \, dv = \int_S \phi_1 \nabla \phi_2 \cdot ds \quad (23 \cdot 2)$$

அதாவது, $$\int_V \nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_2\,dv+\int_V \phi_1\nabla^2\phi_2\,dv=\int_S \phi_1\nabla\phi_2\cdot dS$$

எனவே, $$\int_V \nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_2\,dv=\int_S \phi_1\nabla\phi_2\cdot ds-\int_V \phi_1\nabla^2\phi_2\,dv \quad (23\cdot3)$$

இதேபோல் சமன்பாடு (23·1)-ல் $F=\phi_2\nabla\phi_1$ என்ற வெக்டாராகக் கொண்டால்,

$$\int_V \nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_1\,dv=\int_S \phi_2\nabla\phi_1\cdot ds-\int_V \phi_2\nabla^2\rho_1\,dv \quad (23\cdot4)$$

$\nabla\phi_2\cdot\nabla\phi_1 = \nabla\phi_1\cdot\nabla\phi_2$ ஆதலால், சமன்பாடுகள் (23,3) (23·3) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$\int(\phi_1\nabla\phi_2-\phi_2\nabla\phi_1 dS=\int_V(\phi_1\nabla_2\,\phi^2-\phi_2\nabla^2\phi_1)\,dv \quad (23\cdot5)$$

சமன்பாடுகள் (23·3), (23·5) ஆகியவையே கிரீன் தேற்றமெனை அழைக்கப்படுகின்றன.

24. ஒரு தளத்தில் கிரீன் தேற்றம் (Green's theorem in plane)

ஸ்டோக்ஸ் தேற்றப்படி,

$$\oint F\cdot dR = \iint_S(\nabla\times F)\cdot dS \quad (24\cdot1)$$

இப்போது F என்னும் வெக்டார் x, y தளத்தில் உள்ளதாகக் கொள்வோம். அவ்வாருயின்

$$F = M\vec{i} + N\vec{j} \quad (24\cdot2)$$

$$dR = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \quad (24\cdot3)$$

$$dS = \vec{k}\,dx\,dy \quad (24\cdot4)$$

எண எழுதலாம். (dS என்ற பரப்பு X, Y தளத்திலிருந்தால் அதன் திசை $\vec{i}, \vec{j}$ ஆகியவற்றிற்கு நேர்க்குத்துத் திசையில், அதாவது $\vec{k}$-ன் திசையில் இருக்கும். dx dy என்பது dS என்ற வெக்டாரின் எண் மதிப்பு.)

எனவே $$\oint F\cdot dR = \oint M\,dx + N\,dy \quad (24\cdot5)$$

மேலும்
$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & O \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial N}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

எனவே, $(\nabla \times F).dS = (\nabla \times F)\cdot \vec{k}\, dx\, dy$

அதாவது $(\nabla \times F)\cdot dS = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy$ (24·6)

எனவே, (24·5), (24·6), (24·1) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\int (M\,dx + N\,dy) = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (24\cdot 7)$$

இதுவே ஒரு தளத்திற்குரிய கிரீன் தேற்றமாகும். மேற் காணும் முறையிலிருந்து இத் தேற்றம் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தின் ஒரு நிபந்தனைக்குட்பட்ட விளைவே யாகும் என்பது தெளிவு.

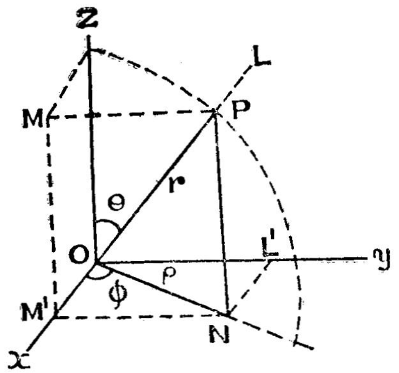
25. பொது நேர்க்குத்து ஆயங்கள் (General Orthogonal Co-ordinates.)

ஒரு தளத்தில் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் இரு ஆயங்களைக் கொண்டு குறிப்பிட்டுச் சொல்கிறோம். அதேபோல் சூழலில் (Space) உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் மூன்று ஆயங்களைக் கொண்டு குறிப்பிட இயலும். இம் மூன்று ஆயங்கள் (x, y, z) என்ற மெய்யெண் களாகவோ (real numbers) அல்லது கூட்டு எண்களாகவோ, அல்லது வேறுவகை எண்களாகவோ இருக்கலாம். இவை பொது இயற்கணித (algebra) விதிகளுக் குட்பட்டவையே.

u, v, w என்ற மூன்று சீரான புள்ளிச் சார்புகளை (Point functions) எடுத்துக் கொள்வோம். இவை மூன்றும் ஏதேனுமொரு P என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் சமனப் பரப்புக்களைக் (level Surfaces) கொண்டுள்ளவை யென்போம் (சமனப் பரப்பு என்பது எந்தப் பரப்பின் மீது u, அல்லது v, அல்லது w-வின் மதிப்பு மாறுமல் இருக்கிறதோ அந்தப் பரப்பைக் குறிக்கும்.) இம் மூன்று பரப்புக்களிலும் u, v, w ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கொண்டு P-யைக் குறிக்க இயலும். இம் மதிப்புக்களை P-யின் ஆயங்கள்

(Co-ordinates) எனலாம். இப் பரப்புக்களை ஆயப் பரப்புக்களென வும், அவை வெட்டிக் கொள்ளும் கோடுகளை ஆயக் கோடுகள் (Co-ordinate lines) எனவும், P-யில் அக் கோடுகளின் தொடு கோடு களை ஆய அச்சுக் கோடுகள் (Co-ordinate axes) எனவும் கூறு கிறோம். ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஆய அச்சுக் கோடுகளின் திசை மாறுபடலாம். u, v, w என்யனவற்றை ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஆய அச்சுக் கோடுகள் ஒன்றுக் கொன்று நேர்க்குத்தாக உள்ள வாறு எடுத்துக் கொள்வதால் பெருமளவு வசதியாகவும், எளிமை யாகவும் ஆயத்தொகுதிகளின் அமைப்பினை எளிதில் அறிய இயலும். இத்தகைய சார்புகள் நேர்க்குத்து ஆயத் தொகுதி (Orthogonal Co-ordinate system)யைத் தருகின்றன. இவற்றுள் ஒன் றிரண்டைப் பின்வரும் பகுதிகளில் காண்போம்.

கார்டீசியன் ஆயங்கள் (Cartesian Co-ordinates) : ஒரு புள்ளி O-வில் சந்திக்கும் O_x, O_y, O_z என்ற ஒன்றுக் கொன்று நேர்க்குத் தான மூன்று நேர் கோடுகளை முறையே x, y, z ஆயக்கோடுகளாக எடுத்துக் கொள்கிறோம். (படம் 26). O_x என்ற கோட்டிலிருந்து O_y என்ற கோட்டை நோக்கி ஒரு வலம்புரித்திருகினைத் திருகும் போது, அதன் முனை O_z-ன் திசையில் முன்னேறினால் அதனை வலம்புரி ஆயக்கோட்டுத் தொகுதி (Right-handed Co-ordinate System) என்றும் O_z-க்கு எதிர்த்திசையில் முன்னேறினால் அதனை இடம்புரி ஆயத் தொகுதி (Left handed Co-ordinate System) என்றும் கூறுகிறோம். நாம் பொதுவாக வலம்புரித் தொகுதியையே பயன்படுத்துகிறோம்.



படம் 26

P என்ற புள்ளியின் கார்டீசியன் ஆயக் கூறுகள் (x,y,z) ஆனால்

x = LP (xy-தளத்திலிருந்து P-யின் தொலைவு)

y = MP (xz-தளத்திலிருந்து P-யின் தொலைவு)

z = NP (xy-தளத்திலிருந்து P-யின் தொலைவு)

P-யிலிருந்து முறையே yz, zx, xy தளங்களுக்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோடுகள் அத் தளங்களை L, M, N என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. O_x, O_y, O_z என்ற கோடுகளின் திசைகளில் அவற்றிற்கு இணையான கோடுகளில் அளக்கப்படும் ஆயக் கூறுகள் நேர்க்குறியுடையனவாகவும், அவற்றிற்கு எதிரான திசைகளில் அளக்கப் பெறும் கூறுகள் எதிர்க்குறியுடையனவாகவும் கொள்ளப் படுகின்றன.

26. கோளகப் போலார் ஆயங்கள் (Spherical Polar Co-ordinates)

படம் 26ஐ மீண்டும் காண்போம். POZ, XOY என்ற தளங்கள் ON என்ற கோட்டில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. இப்போது P-யின் கோளகப் போலார் ஆயங்கள் r, θ, ϕ என்பனவானால்,

$$r = OP$$
$$\theta = \angle POX$$
$$\phi = \angle NOX \qquad \text{............(26.1)}$$

மேலும் P-யின் கார்டீசியன் ஆயக் கூறுகள் (x, y, z) எனக் கொண்டால்

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (26.2)$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \qquad (26.3)$$

$$\cos\phi = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\,;\ \sin\phi = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (26.4)$$

மற்றும் படத்திலிருந்து x, y, x ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை r, θ, ϕ ஆகியவற்றின் துணைகொண்டு பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

27. உருளை ஆயங்கள் (Cylindrical Co-oridinates)

படம் 26-ல் XOY என்ற தளத்தில் OP-யின் வீழ்ச்சி (Projection) ON $= \rho$ என்போம்.

$$\therefore\ \rho = ON$$
$$\phi = \angle NOX$$
$$z = NP \qquad (27.1)$$

ρ, ϕ, z என்பன P என்ற புள்ளியின் உருளை ஆயங்கள் ஆகும்.

மேலும் $\rho = (\ + y^2)^{\frac{1}{2}}$ (27,2)

$$\cos\phi = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (27.3)$$

$$\sin\phi = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (27\ 4)$$

P-யின் கார்டீசியன் ஆயக் கூறுகள் (x, y, z) என இருந்தால் படத்திலிருந்து

$$x = \rho\cos\phi; \quad y = \rho\sin\phi; \quad z = z \quad (27.5)$$

இதுவே உருளை ஆயங்களுக்கும் கார்டீசியன் ஆயங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பாகும்.

28. ஆயங்களின் மாற்றம் (Transformation of Co-ordinates)

விளை பயன்கள் (applications)

$$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (28.1)$$

என்பது P-ன் இடத்தைக் குறிக்கும் வெக்டார் (position vector) என்போம். P என்ற புள்ளியை முன்பு கூறியது போல u, v, w என்ற புள்ளிச் சார்புகளால் குறிக்க இயலுமாயின்,

$$x = x(u, v, w) \quad y = y(u, v, w) \quad z = z(u, v, w) \quad (28\cdot2)$$

அவ்வாருயின்,

$$R = R(u, v, w) \text{ ஆகும்.} \quad (28\cdot3)$$

இப்போது $\frac{dR}{du}$ என்பது R-க்கு நேர்க்குத்தான தொடுகோட்டு வெக்டார் (tangent vector) ஆகும் u-வின் திசையில் $\vec{e}_1$ என்பது ஓரலகு வெக்டாராக இருந்தால்,

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \left|\frac{\partial R}{\partial u}\right|\vec{e}_1 \quad (28\cdot4)$$

இதில் $\left|\frac{\partial R}{\partial u}\right|$ என்பது $\frac{\partial R}{\partial u}$ என்ற வெக்டாரின் எண் மதிப்பைக் குறிக்கும். $\left|\frac{\partial R}{\partial u}\right| = h_1$ என எழுதினல்,

$$\frac{\partial R}{\partial u} = h_1\vec{e}_1 \quad (28\cdot5)$$

இதேபோல $$\frac{\partial R}{\partial v} = h_2 \vec{e_2} \qquad (28\cdot6)$$

$$\frac{\partial R}{\partial w} = h_3 \vec{e_3} \qquad (28\cdot7)$$

எனவும் எழுதலாம்.

$R = R(u, v, w)$ ஆதலால்,

$$dR = \frac{\partial R}{\partial u}du + \frac{\partial R}{\partial v}dv + \frac{\partial R}{\partial w}dw \qquad (28\cdot8)$$

எனவே, $$dR = h_1\,du\,\vec{e_1} + h_2\,dv\,\vec{e_2} + h_3\,dw\,\vec{e_3} \qquad (28\cdot9)$$

வில் நீளத்தின் வேறுபாடு (differential of are length) ds என்பதை $ds^2 = dR \cdot dR$ என்பதிலிருந்து பெறலாம். நேர்க்குத்து ஆயத்தொகுதிகட்கு

$\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} = \vec{e_3} \cdot \vec{e_1} = 0$ ஆதலால்,

$$ds^2 = h_1^2\,du^2 + h_2^2\,dv^2 + h_3^2\,dw^2 \qquad (28\cdot10)$$

u-வின் திசையில் v, w ஆகியவை மாறுவதில்லை யாதலால்,

$dR = h_1\,du\,\vec{e_1}$; எனவே

u-வின் திசையில் வில் நீளத்தின் வேறுபாடு

$$ds_1 = h_1\,du\,; \qquad (28\cdot11)$$

அவ்வாறே $ds_2 = h_2\,dv\,;\; ds_3 = h_3\,dw \qquad (28\cdot12)$

எனவே சிறு பருமன் $dv = ds_1\,ds_2\,ds_3$ ஆதலால்,

$$dv = h_1\,h_2\,h_3\,du\,dv\,dw \qquad (28\cdot13)$$

வாட்டம், விரிவு, சுழிவு :

P என்ற புள்ளியில் வளைகோட்டு ஆயங்களின் அச்சுக் கோடுகள், X, Y, Z ஆகியவற்றின் திசையில், அவைகளோடு ஒன்றியிருந்தால் அந்தப் புள்ளியில்

$$dx = h_1\,du;\quad dy = h_2\,dv;\quad dz = h_3\,dw \qquad (28\cdot14)$$

ψ என்பது ஒரு ஸ்கேலார் புள்ளிச் சார்பென்போம்.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial n} \qquad (28.15)$$

அதேபோல் $$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial v}\,;\; \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial w} \qquad (28.16)$$

P–என்ற புள்ளியில் $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ என்பன $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ஆகியவற்றுடன் ஒன்றியுள்ளதால்

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{k}$$ என்பதை

$$\nabla \psi = \frac{\vec{e}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\vec{e}_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\vec{e}_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial w} \qquad (28.17)$$

இதேபோன்று விரிவு, சுழிவு ஆகியவற்றுக்கான சமன்பாடுகளையும் பெற இயலும்.

$F = f_1 \vec{e}_1 + f_2 \vec{e}_2 + f_3 \vec{e}_3$ என்பது ஒரு வெக்டார் சார்பாக இருந்தால்,

$$\nabla . F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 f_1) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 f_2) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 f_3) \right\} \qquad (28.18)$$

$$\nabla \times F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 f_1 & h_2 f_2 & h_3 f_3 \end{vmatrix} \qquad (28.19)$$

மேலும்

$$\nabla^2 \psi = \nabla . \nabla \psi$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) \right\}$$

எனவும் காட்ட இயலும். (28.20)

இச் சமன்பாடுகளில் $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ எனவும் $\vec{e}_1 = \vec{i}; \vec{e}_2 = \vec{j}$; $\vec{e}_3 = \vec{k}$ எனவும் எழுதினுல் கார்டீசியன் ஆயங்களுக்கான சமன்பாடுகள் கிடைக்கக் காணலாம்.

உருளை ஆயங்களுக்கு h_1, h_2, h_3 காணும் முறை:

வில்லொன்றின் நீளத்தின் வேறுபாடு dl ஆனால்
$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ஆகும்.

சமன்பாடு (27.5)-லிருந்து

$$dx = -\rho \sin\phi \, d\phi$$
$$dy = \rho \cos\phi \, d\phi$$
$dz = dz$ ஆதலால்,
$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\phi^2 + dz^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(28.21)$$

ஆனால் சமன்பாடு (28.10)-லிருந்து
$dl^2 = h_1^2 \, du^2 + h_2^2 \, dv^2 + h_3^2 \, dw^2$ ஆதலால்
உருளை ஆயங்களில் $u = \rho$; $v = \phi$; $w = z$

ஆதலால் $h_1 = 1$; $h_2 = \rho$; $h_3 = 1$ (28.22)

கோள ஆயங்களுக்கு h_1, h_2, h_3 காணும் முறை:

சமன்பாடு (26.5)-லிருந்து

$x = r \sin\theta \cos\phi$; $y = r \sin\theta \sin\phi$; $z = r \cos\theta$ ஆதலால்,
$$dx = -r \sin\theta \, \phi \, d\phi + r \cos\theta \cos\phi \, d\theta + \sin\theta \cos\phi \, dr$$
$$dy = r \sin\theta \cos\phi \, d\phi + r \cos\theta \sin\phi + \sin\theta \sin\phi \, dr$$
$$dz = -r \sin\theta \, d\theta + \cos\theta \, dr$$
எனவே $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ஆதலால்
$$dl^2 = dr^2 + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (28.23)$$
ஆனால், $dl^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 \, dv^2 + h_3^2 \, dw^2$ ஆதலால்
$u = r$; $v = \theta$; $w = \phi$ எனும் போது
$$h_1 = 1; h_2 = r; \; h_3 = r \sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots(28.24)$$

இவ்வாறு u, v, w ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களையும் h_1, h_2, h_3 ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களையும் கொண்டு, கோள ஆயங்களிலும், உருளை ஆயங்களிலும், வாட்டம், விரிவு, சுழிவு, லாப்லாசியன் ஆகியவற்றுக்கான சமன்பாடுகளைப் பெற இயலும்.

கோள ஆயங்கள் பயன்படும் முறைக்கு எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு மின் இரட்டை (Electric dipole on doublet) தோற்றுவிக்கும் மின்புல வலிமையைக் கணக்கிடும் முறையைக் காண்போம்.

வரையறைப்படி, மின்னழுத்தம் (Electric potential) V-ஆனால் மின்புல வலிமை

$$E = -\nabla V$$

இப்போது E-யின் கூறுகளைக் கோள ஆயங்களில் எழுதுவோம். கோள ஆயங்களுக்கு,

$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r \sin\theta$ ஆதலால்

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

மின் இரட்டை என்பது அருகருகே அமைந்த $+q$, $-q$ என்ற சம எண்மதிப்புக்கள் கொண்ட ஆனுல் எதிரெதிரான இரு மின்னூட்டங்களைக் குறிக்கும். இவைகளின் இடைத்தூரம் l எனக் கொள்வோம். $P(r, \theta, \phi)$ என்ற புள்ளியில் E-யின் மதிப்பைக்காண, அப்புள்ளியில் V-யின் மதிப்பைத் தெரிந்திருந்தால் போதுமானது.

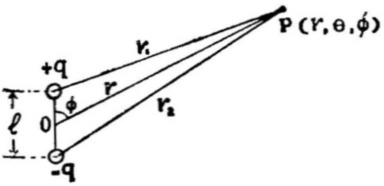
வரையறைப் படி

$$V_p = \frac{1}{k}\left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right]$$

இதில் K-ஓர் மாறிலி. படத்திலிருந்து, $l >> r$ ஆதலால்,

$$r_1 = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$r_2 = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$



படம்—26 A

மேலும் $q_1 = q;\ q_2 = -q$.

எனவே,

$$V_p = k\left[\frac{q}{r - \frac{l\cos\theta}{2}} - \frac{q}{r + \frac{l\cos\theta}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{q\,l\cos\theta}{r^2 - \frac{l^2\cos^2\theta}{4}}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{q\,l\cos\theta}{r^2}\right] \quad (\because \quad l^2 << r^2)$$

எனவே,

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2q\,l\cos\theta}{K\,r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{q\,l\sin\theta}{K\,r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial v}{\partial \phi} = 0.$$

இவற்றிலிருந்து E -யின் மதிப்பை யறியலாம்.

இதே போன்று, கோள ஆயங்களும், உருளை ஆயங்களும் இயற்பியலில், பல்வேறு இடங்களில் எளிமையைக் கருதி இடத்துக் கேற்பப் பயன் படுத்தப்படுகின்றன.

29. உருளை ஆயங்களில் திசைவேகம் $\vec{V}$, முடுக்கம் $\vec{a}$ ஆகியவற்றுக் கான சமன்பாடுகள்

$$R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{29·1}$$

திசைவேகம்,

$V = \frac{dR}{dt}$ ஆதலால் இதனை $\dot{R}$ எனக் குறித்தால்,

(எழுத்தின் மீது வைக்கப்படும் புள்ளி காலத்தைப் பொறுத்த பகுதியைக் குறிக்கும்.)

$$V = \dot{R} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \tag{29·2}$$

உருளை ஆயங்களில்

$x = \rho\cos\phi$; $y = \rho\sin\phi$; $z = z$ ஆதலால்

$$R = \rho\cos\phi\,\vec{i} + \rho\sin\phi\,\vec{j} + z\,\vec{k} \tag{29·3}$$

எனவே $$\frac{\partial R}{\partial \rho}\cos = \phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j} \tag{29·4}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \phi} = -\rho \sin\phi \, \vec{i} + \rho \cos\phi \, \vec{j} \qquad (29.5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \vec{k} \qquad (29\cdot6)$$

எனவே e_ρ , e_ϕ , e_z என்பன ρ, ϕ, z ஆகியவை முறையே உயரும் திசைகளில் அலகு வெக்டார்களானல்,

$$e_\rho = \frac{\frac{\partial R}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial R}{\partial \rho}\right|} = \frac{\cos\phi \, \vec{i} + \sin\phi \, \vec{j}}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}}$$

எனவே, $e_\rho = \cos\phi \, \vec{i} + \sin\phi \, \vec{j}$ (29·7)

மேலும், $e_\phi = \dfrac{\frac{\partial R}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right|}$ ஆதலால்

$$e_\phi = -\sin\phi \, \vec{i} + \cos\phi \, \vec{j} \qquad (29\cdot8)$$

அதேபோல் $e_z = \dfrac{\frac{\partial R}{\partial z}}{\left|\frac{\partial R}{\partial z}\right|}$ ஆதலால் $e_z = \vec{k}$ (29·9)

மேலும் சமன்பாடு (29·7), (29·8) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\cos\phi \; e_\rho = \cos^2\phi \, \vec{i} + \sin\phi\cos\phi \, \vec{j}$$

$$-\sin\phi \; e_\phi = \sin^2\phi \, \vec{i} - \sin\phi\cos\phi \, \vec{j}$$

இதிலிருந்து இரண்டையும் கூட்ட

$$\vec{i} = \cos\phi \; e_\rho - \sin\phi \; e_\phi \qquad (29\ 10)$$

அதேபோல்

$$\vec{j} = \sin\phi\ e_\rho + \cos\phi\ e_\phi \qquad (29{\cdot}11)$$

எனக் காட்டலாம். $\vec{k} = \vec{e_z}$ என்பதையும் அறிவோம்.

$$\therefore \qquad R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \text{ஆதலால்}$$

$$R = (\rho\cos\phi)(\cos\phi\ e_\rho - \sin\phi\ e_\phi)$$

$$+ (\rho\sin\phi)(\sin\phi\ e_\rho) + \cos\phi\ e_\phi) + z\vec{e_z}$$

எனவே, $$R = \rho\vec{e_\rho} + z\vec{e_z} \qquad (28{\cdot}12)$$

இதனை t-யைப் பொறுத்து வேறுபடுத்தினால்,

$$\frac{dR}{dt} = V = \frac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$

$$\therefore \qquad = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} + \dot{z}\vec{e_z}$$

சமன்பாடு (29·7), (29·8) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} = \dot{\phi}\vec{e_\phi} \quad \text{ஆதலால்,}$$

$$V = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\phi}\vec{e_\phi} + \dot{z}\vec{e_z} \qquad (29{\cdot}13)$$

முடுக்கம் A ஆனால்

$$A = \dot{V} = \dot{\rho}\frac{de_\rho}{dt} + \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\phi}\frac{d\vec{e_\phi}}{dt}$$

$$+ \rho\ddot{\phi}\vec{e_\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\vec{e_\phi} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

$$= \dot{\varrho}\,\dot{\phi}\,\vec{e_\phi} + \rho\,\ddot{\phi}\,\vec{e_\phi} + \rho\,\dot{\phi}\,(-\dot{\phi}\,\vec{e_\rho}) + \dot{\rho}\,\dot{\phi}\,\vec{e_\phi}$$

$$+ \dot{\rho}\,\dot{\phi}\,\vec{e_\phi} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$$

$$\therefore \text{ முடுக்கம் } A = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\vec{e_\phi} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$$

(29.14)

இதே முறையில் கோள ஆயங்களிலும் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றுக்கான சமன்பாடுகளைப் பெற இயலும்.

30. சில எளிய பயிற்சிகள் (Exercise)

விளக்கக் கணக்கு (1): C என்பது ஒரு எளிய முற்றுப் பெற்ற வளை கோடானால், அதனால் சூழப்பட்டுள்ள பரப்பு $\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$ எனக் காட்டு.

கிரீன் தேற்றத்தில் (சமன்பாடு (24.7), $M = -y$; $N = x$ எனக் கொண்டால்

$$\int_C x\,dy - y\,dx = \iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right\} dx\,dy$$

$$= 2\iint_S dx\,dy$$

$$= 2A.$$

இதில் A என்பது S என்ற பரப்பின் பரப்பளவைக் குறிக்கிறது. எனவே

$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx \qquad (30.1)$$

விளக்கக் கணக்கு (2): $x = a\cos\theta$; $y = a\sin\theta$ என்ற நீள் வட்டத்தின் (ellipse) பரப்பளவைக் கணக்கிடு.

சமன்பாடு (30.1)-லிருந்து பரப்பளவு

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big\{ (a\cos\theta)\,(b\cos\theta)\,dx - (b\sin\theta)\,(-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0} ab\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} ab\, d\theta = \pi ab$$

$$\therefore \quad A = \pi ab \qquad (30.2)$$

விளக்கக் கணக்கு (3) : $A = a_1 \vec{i}, + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ என்ற வெக்டாராகவும், S என்ற பரப்பின் அலகு இயல்புக் கோட்டின் (Unit normal) திசைக் கொசைன் (direction cosines) மதிப்புக்கள் $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ எனவும் இருந்தால், இத்தகைய பரப்புக்கான விரிவுத் தேற்றத்தை எழுது.

காஸ் தேற்றம், விரிவுத் தேற்ற மெனவும் அழைக்கப் படும், சமன்பாடு (21.1)-ன் படி

$$\iiint_V \nabla \cdot F\, dv = \iint_S F.ds \qquad (30.3)$$

N என்பது ds என்ற பரப்புக்கு வெளி நோக்கி இயல்புக் கோட்டின் திசையில் ஓரலகு வெக்டாரானல்

$$dS = N\, ds. \qquad (30.4)$$

எனவே சமன்பாடு (30.3), (30.4) ஆகியவற்றிலிருந்து F-க்குப் பதிலாக A என எழுதினல்

$$\iiint_V \nabla . A\, dv = \iint_S F.N\, ds \qquad (30.5)$$

$A = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ ஆதலால்,

$\nabla . A = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$ ஆகும்.

திசைக் கொசைன் (direction Cosine) என்பது அலகு இயல்புக் கோடு N, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ஆகியவற்றின் திசைகளுடன் (அதாவது $+x$, $+y$, $+z$ திசைகளுடன்) முறையே உண்டாகும் கோணங்களின் கொசைன் (Cosine) மதிப்பைக் குறிக்கும்.

$\mathrm{N} = n_1 \vec{i} + n_2 \vec{j} + n_3 \vec{k}$ என எழுத இயலு மாதலால்

$$\mathrm{N}.\vec{i} = n_1;\ \ \mathrm{N}.\vec{j} = n_2;\ \ \mathrm{N}.\vec{k} = n_3 \qquad (30.6)$$

ஆனல், $\mathrm{N} . \vec{i} = \cos \alpha$ (வரையறைப்படி)

அதேபோல் $\mathrm{N} . \vec{j} = \cos \beta;\ \mathrm{N} . \vec{k} = \cos \gamma$

எனவே, $\mathrm{N} = \cos \alpha\, \vec{i} + \cos \beta\, \vec{j} + \cos \gamma\, \vec{k}$ ஆதலால், (30.7)

$$\iint_S \mathrm{A.N}\ ds = \iint_S (a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma)\ ds$$

எனவே, சமன்பாடு (30.5)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_S (a_1 \cos \alpha + a_2 \cos \beta + a_3 \cos \gamma)\ ds \qquad (30.8)$$

இதுவே நேர்க்குத்து ஆயங்களுக்கான விரிவுத் தேற்றமாகும்.

விளக்கக் கணக்கு (4): S என்பது $x = 0; x = 1; y = 0; y = 1; z = 0;\ z = 1$ என்ற பரப்புகளால் சூழப்பட்ட ஒரு கன சதுரப் பரப்பைக் குறித்தால் $\mathrm{F} = 4xz\, \vec{i} - y^2\, \vec{j} + yz\, \vec{k}$ என்ற வெக்டார் $\iint_S \mathrm{F.N}\ ds$-ன் மதிப்பை கணக்கிடு.

விரிவுத் தேற்றத்தின்படி

$$\iint_S \mathrm{F.N}\ ds = \iiint_V \nabla.\mathrm{F}\ dv \qquad (30.9)$$

எனவே $$\iiint_V \nabla.\mathrm{F}\ dv = \iiint_V \left\{\frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)\right\} dv$$

$$= \iiint_V (4z-y)\, dv$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (4z-y)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} (2-y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \tfrac{3}{2}\, d\overset{2}{x} \quad = 3/2$$

எனவே, $\iint_S \mathrm{F.N}\, ds = 3/2$

விளக்கக் கணக்கு (5) : $\mathrm{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்ற இடங்குறிக்கும் வெக்டாருக்கு **(Position vector)** S-என்ற மூடிய பரப்பில் $\iint_S$ **R.N** ds-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு.

விரிவுத் தேற்றப்படி

$$\iint_S \mathrm{R.N}\, ds = \iiint_V \nabla.\mathrm{R}\, dv$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\times\ (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\, dv$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right) dv = \iiint\limits_V 3\ dv = 3v$$

இதில் v என்பது மூடிய பரப்பிலடங்கிய பருமனைக் குறிக்கும். எனவே,

$$\iint\limits_S R.N\ ds = 3v \qquad (30.11)$$

விளக்கக் கணக்கு (6): உருளை ஆயத் தொகுதி நேர்க்குத்துத் தன்மை (Orthogonal) உடையது எனக் காட்டு.

உருளை ஆயங்களில் இடங்குறிக்கும் வெக்டார் $\vec{R} = \rho \cos\phi\ \vec{e} +$

$\rho \sin \phi\ \vec{j} + z\ \vec{k}$ *[சமன்பாடு (29.3)-ன் படி]* (30.11)

ρ, ϕ, z ஆகிய ஆயக்கோடுகளுக்குத் தொடு கோட்டு வெக்டார்கள் முறையே $\frac{\partial R}{\partial \rho}$, $\frac{\partial R}{\partial \phi}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ என்பனவாகும்.

சமன்பாடு (29·7), (28.8), (29.9) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial R}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial R}{\partial \rho}\right|} = \cos\phi\ \vec{i} + \sin\phi\ \vec{j} \qquad (30.12)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\frac{\partial R}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial R}{\partial \phi}\right|} = -\sin\phi\ \vec{i} + \cos\phi\ \vec{j} \qquad (30.13)$$

$$\vec{e}_z = \frac{\frac{\partial R}{\partial z}}{\left|\frac{\partial R}{\partial z}\right|} = \vec{k} \qquad (30.14)$$

எனவே $\vec{e_\rho} \cdot \vec{e_\phi} = (\cos\phi\, \vec{i} + \sin\phi\, \vec{j}) \cdot (-\sin\phi\, \vec{i} + \cos\phi\, \vec{j})$

$$= -\cos\phi\sin\phi + \cos\phi\sin\phi$$
$$= O.$$

அதேபோல் $e_\phi \cdot e_z = (-\sin\phi\, \vec{i} + \cos\phi\, \vec{j}) \cdot \vec{k}$
$$= O$$

மேலும் $e_z \cdot e_\rho = \vec{k} \cdot (\cos\phi\, \vec{i} + \sin\phi\, \vec{j}) = 0$

எனவே $$e_\rho \cdot e_\phi = e_\phi \cdot e_z = e_z \cdot e_\rho = 0 \qquad (30.14)$$

இதிலிருந்து e_ρ, e_ϕ, e_z என்பன ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தானவை என்பது தெளிவு

பயிற்சிக் கணக்குகள் :

1. $A = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ஆகவும்,

$N = \cos a\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$ ஆகவும் இருந்தால், (N-என்பது ஓரலகு இயல்புக் கோட்டு வெக்டார்)

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\cos a + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial a^2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\cos\gamma \right] ds = \int_C a_1 dx + a_2 dy + a_3 d_z$$

என ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்திலிருந்து நிரூபி.

2. S என்ற எந்த மூடிய பரப்புக்கும், $H = \nabla \times A$ எனில் $\iint_S H \cdot N\, ds = 0$ எனக் காட்டு.

3. $A = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$ என்ற வெக்டாரை உருளை ஆயங்களில் கூறு. அதன் மூலம் a_ρ, a_ϕ, a_z ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. உருளை ஆயங்களில் $\nabla\Phi$, $\nabla \cdot F$, $\nabla \times F$, $\nabla^2\Phi$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

5. கோள ஆயங்களில்

$$\nabla\Phi = e_\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{e_\theta}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{e_\phi}{\rho \sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla.F = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 f_1) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, f_2) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial f_3}{\partial\phi}\right)$$

$$\Delta^2\Phi = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\gamma^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times F = \frac{e_\rho}{\rho\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(f_3\sin\theta) - \frac{\partial f_2}{\partial\phi}\right\} + \frac{e_\theta}{\rho}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_1}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f_3)\right\} + \frac{e_\phi}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho f_2) - \frac{\partial f_1}{\partial\theta}\right\}$$

என்பவற்றைப் பெறுக.

6. கோள ஆயத் தொகுதி நேர்க்குத்துப் பண்புடையது (Orthogonal) எனக்காட்டு.

7. திசைவேகம் V, முடுக்கம் A ஆகியவற்றை கோள ஆயங்களில் காண்க.

8. $A = -y\vec{i} + x\vec{j}$ ஆனல் (i) $(\nabla\times A)$ யின் மதிப்பைக் கணக்கிடு. (ii) $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ என்ற வட்டத்தில் $\int \vec{A}\,.\,dl$-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடு. எனவே, ஸ்டோக்ஸ் தேற்றம் சரியெனக் காட்டு.

9. S என்பது V என்ற பருமனைக் கொண்ட ஒரு மூடிய பரப்பானல், $F = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ ஆனல், $\iint_S F.ds = 6V$ எனக் காட்டுக.

10. $F = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ ஆகவும், S என்பது x, y தளத்துக்கு மேலுள்ள $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளப்பரப்பாகவும் இருந்தால் ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தைச் சரி பார்க்கவும்.

11. $z = 0$ என்ற தளத்திலுள்ள $x=0$; $y=0$; $x=a$ $y=a$ என்ற பக்கங்களை உடைய சதுரத்தின் பக்கங்களின் வழியே $F = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ என்ற சார்புக்கு ஸ்டோக்ஸ் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்க.

பிரிவு II

இயக்கவியல் (Dynamics)

31. பரிமாணங்கள் (Dimensions)

நீளம், நிறை, காலம் என்ற மூன்று அடிப்படைப் பண்புகளைப் பற்றி அறிவோம். இவை ஒவ்வொன்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட அலகின் வாயிலாக அளவிடப் பெறுகின்றன. அலகுகள் எவையாயினும் எந்த ஒரு பௌதிக அளவினையும் நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றைக் கொண்டு பரிமாண முறையில் (Dimensional Method) குறிப்பிடலாம்.

ஒரு கோட்டிற்கு நீளம் என்ற பண்பு மட்டுமே உண்டு. அகலமோ, உயரமோ இல்லையாதலால், கோடு ஒரு நீளப் பரிமாணம் கொண்டதென்கிறோம்.

ஒரு பரப்பு நீளம், அகலம் என்ற இரண்டு நீளப் பரிமாணங்கள் கொண்டது. அதேபோல், பருமன் மூன்று நீளப் பரிமாணங்கள் கொண்ட அளவாகும். நீளப் பரிமாணம் [L] என்ற குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி எழுதப் பெறும். இவ்வாறு சதுர அடைப்புக்குள் எழுதப்படுபவை பரிமாணங்களை மட்டுமே குறிப்பன.

$$[\text{நீளம்}] = [L]$$

$$[\text{அகலம்}] = [L]$$

$$[\text{பரப்பு}] = [L^2] \qquad (31\cdot2)$$

$$[\text{பருமன்}] = [L^3] \qquad (31\cdot3)$$

பரப்பு, பருமன் ஆகியவற்றின் அலகுகள் நீளத்தின் அலகுகளிலிருந்தே பெறப்படுவனவாதலால், அவை வழியலகுகள் எனப்படுகின்றன. நீளத்தைப் போன்றே நிறை (Mass), காலம் (Time) ஆகியவைகளும் அடிப்படை அலகுகளாதலால், அவை முறையே [M], [T] என்ற தனித்தனிப் பரிமாணங்கள் கொண்டவை. நீளம், நிறை, காலம் இவற்றின் அலகுகள் அடிப்படை அலகுகளெனவும் மற்ற பௌதிக அளவுகளின் அலகுகள் வழியலகுகளெனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. மற்றெல்லா பௌதிக அளவுகளையும் இம்மூன்று அளவுகளிலிருந்து பெற இயலும்.

இப்போது சில முக்கியமான பௌதிக அளவுகளுக்குப் பரிமாணங்களைக் காண்போம்.

$$[\text{திசைவேகம்}] = \left[\frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{காலம்}}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] = [LT^{-1}] \quad (31.4)$$

$$[\text{முடுக்கம்}] = \left[\frac{\text{திசைவேக மாற்றம்}}{\text{காலம்}}\right]$$

$$= \left[\frac{LT^{-1}}{T}\right] = [LT^{-2}] \quad (31.5)$$

$$[\text{விசை}] = [\text{நிறை} \times \text{முடுக்கம்}] = [MLT^{-2}] \quad (31.6)$$

$$[\text{அடர்த்தி}] = \left[\frac{\text{நிறை}}{\text{பருமன்}}\right] = \left[\frac{M}{L}\right] = [ML^{-3}] \quad (31.7)$$

$$[\text{உந்தம்}] = [\text{நிறை}] \times [\text{திசைவேகம்}] = [MLT^{-1}] \quad (31.8)$$

$$[\text{ஆற்றல், பணி}] = [\text{விசை} \times \text{இடப்பெயர்ச்சி}]$$
$$= [MLT^{-2}][L] = [ML^2T^{-2}] \quad (31.9)$$

$$[\text{திறன்}] = \left[\frac{\text{பணி}}{\text{நேரம்}}\right] = \left[\frac{ML^2T^{-2}}{T}\right]$$
$$= [ML^2T^{-3}] \quad (31.10)$$

$$[\text{கோணம்}] = \left[\frac{\text{வட்டவில் நீளம்}}{\text{ஆர நீளம்}}\right] = \left[\frac{L}{L}\right]$$
$$= [L^0] = 1 = \text{பரிமாண மற்றது} \quad (31.11)$$

$$[\text{கோணத்தின் திசைவேகம்}] = \left[\frac{\text{கோணம்}}{\text{நேரம்}}\right] = \left[\frac{1}{T}\right]$$
$$= [T^{-1}] \quad (31.12)$$

$$[\text{அழுத்தம்}] = \left[\frac{\text{விசை}}{\text{பரப்பு}}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{T^2}\right]$$
$$= [ML^{-1}T^{-2}] \quad (31.13)$$

இவ்வாறு எல்லாப் பௌதிக அளவுகளுக்கும் பரிமாணக் குறியீடுகள் காணலாம்.

இம் முறையில் மூன்று அடிப்படை அலகுகள் போதுமானவையெனினும், வெப்ப இயக்க வியலில் வெப்ப அலகும் நிலை [θ] என்ற அடிப்படை அலகும், மின்னியலில் மின்னூட்டம் [Q] என்ற அடிப்படை சில சமயம் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

பரிமாணங்களின் பயன்கள் : *(1)* பௌதிக விதிகளைக் கணித முறையில் சமன்பாடுகள் வாயிலாகக் குறிப்பிடும் போது சமன்பாடுகளின் இரு புறங்களின் பரிமாணங்கள் சமமாதல் வேண்டும்.

காட்டாக $s = \frac{1}{2} at^2$ என்ற சமன்பாட்டை நோக்குவோம். பரிமாணங்களை எழுதினால்,

$[L] = [LT^{-2}][T^2] = [L]$

எனக் கிடைக்கும். ($\frac{1}{2}$ என்பதற்குப் பரிமாணமில்லை).

(2) வாய்பாடுகளைப் பெறுவதற்குப் பரிமாண முறை பெரிதும் பயனுள்ளது. காட்டாக, ஒரு தனி ஊசலின் அலைவு நேரத்திற்கான வாய்பாட்டைப் பின் வருமாறு பெறலாம் :

தனி ஊசலின் அலைவு நேரம், அதன் நீளம், குண்டின் நிறை, புவியீர்ப்பு முடுக்கம் இவற்றை எவ் வகையில் பொறுத்துள்ளது எனக் காண்போம். அலைவு நேரம் t எனவும், குண்டின் நிறை m எனவும் முடுக்கம் g எனவும் குறித்தால்,

$t = K.\, l^x m^y g^z$ என்பதற் கேற்ப இருப்பதாகக் கொள்வோம். K. என்பது பரிமாண மற்ற ஓர் மாறிலி. இப்போது பரிமாணங்களை இரு புறமும் எழுதினால்,

$[T] = [L^x][M^y][L^z T^{-2z}]$

இரு புறமும் பரிமாண எண்களைச் சமப்படுத்தினால்

$$x + z = 0$$
$$y = 0$$
$$-2z = 1$$ எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, $z = -\frac{1}{2};\ x = \frac{1}{2};\ y = 0$ ஆகும்.

ஆதலால், $t = k.l^{\frac{1}{2}} M^{\circ}.g^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore\quad t = k\sqrt{l/g} \qquad (31.14)$$

சோதனை மூலம் K-யின் மதிப்பைக் கண்டறியலாம். K-யின் மதிப்பு 2π-க்குச் சமமாக இருக்கக் காணலாம். எனவே, தனி ஊசலின் அலைவு நேரம் $t = 2\pi\sqrt{l/g}$ (31.15)

கடலலைகளின் வேகம் : மேற்கண்ட முறையில் கடலலைகளின் வேகத்திற்கான வாய்பாட்டைப் பெறலாம். கடலலையின் வேகம் v, அதன் அலை நீளம் λ, புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g, அடர்த்தி ρ ஆகியவற்றைப் பொறுத்துள்ள தென்போம். அவ்வாறாயின்,

$$v = K\, g^x \lambda^y \rho^z \qquad (30.16)$$

என எழுதலாம். பரிமாணச் சமன்பாட்டை எழுதுவோம்.

$[LT^{-1}] = [L^x T^{-2x}][L^y][M^z L^{-3z}]$

$$\therefore\quad [LT^{-1}] = [L^{x+y-3z} M^z T^{-2x}] \qquad (31.17)$$

இச் சமன் பாட்டின் இரு புறமும் பரிமாண எண்களைச் சமப் படுத்தினால்

$$x+y-3z = 1$$
$$z = 0$$
$$-2x = -1$$

எனக் கிடைக்கிறது. எனவே,

$x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = 0$ ஆகும். இதனைச் சமன்பாடு (31. 16)-ல் பிரதியிட

$$v = k\, g^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \rho^{\cdot}$$
$$= K\sqrt{g\lambda}$$

சோதனைகள் மூலம் $K = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$ எனக் கிடைப்பதால்

கடலலைகளின் வேகம் $v = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$ (31.18)

இதில் ρ-என்ற உறுப்பு இல்லாததால், ஒரு குறிப்பிட்ட அலை நீள முள்ள அலைகள் எந்தத் திரவத்திலும் ஒரே வேகத்துடன் செல்லுகின்றன என்பது தெளிவு. அதாவது குறிப்பிட்ட அலை நீளமுடைய அலைகளின் வேகம், திரவம் பாதரசமாக இருப்பினும், நீராக இருப்பினும் ஒரே அளவினதாக இருக்கும்.

(3) அளவீட்டு முறைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு : விசை பரிமாணம் $[MLT^{-2}]$ எனக் கண்டோம். (சமன்பாடு 31.6)

பவுண்டல் (Poundal) என்பது F.P.S. அளவீட்டு முறையிலும், நியூட்டன் என்பது M.K.S. அளவீட்டு முறையிலும், விசையின் அலகுகளாகும். இரு முறைகளிலும் காலத்தின் அலகு ஒன்று தான். ஆனால், நீளத்திலும், நிறையிலும் அலகுகள் வேறு பட்டவை. ஆங்கில முறையில் (F.P.S.) நீளம் அடி (Foot) என்ற அலகாலும், மெட்ரிக் முறையில் (M.K.S) நீளம் மீட்டர் (Metre) என்ற அலகாலும் அளக்கப்படும்.

1 அடி = 0.3048 மீட்டர் (31.19)

1 பவுண்டு = 0.4536 கிலோ கிராம் (31.20)

எனவே, 1 பவுண்டல் = 1 பவுண்டு × அடி × (செகண்டு)$^{-2}$
[M] [L] $[T^{-2}]$
= 0.4536 கிலோ கிராம் × 0.3048 மீட்டர் × (செகண்டு)$^{-2}$
= 0.13826 கிலோ கிராம் × மீட்டர் × (செகண்டு)$^{-2}$
[M] [L] $[T^{-2}]$
= 0.13826 நியூட்டன்.

எனவே, 1 பவுண்டல் = 0.13826 நியூட்டன் (31.21)

இவ்வாறு பரிமாணங்களைக் கொண்டு அலகுகளுக்கிடையே யுள்ள தொடர்புகளை யறியலாம். ஆனால், அடிப்படை அலகுகளுக் கிடையேயான தொடர்புகள் தெரிந்திருக்க வேண்டும்.

32. அலகுகள் (Units)

எந்திரவியலில் பௌதிக அளவுகளை மூன்று அடிப்படை அளவுகளை மட்டுமே கொண்டு குறிப்பிட இயலும். இம் மூன்று அடிப்படை அளவுகளாக எந்த மூன்றையும் தேவைக் கேற்றவாறு எடுத்துக் கொள்ளலாமாயினும், பௌதிகத்தில் பெரும்பாலும், நீளம் (length), நிறை (Mass), காலம் (Time) என்ற அளவுகளையே பயன்படுத்துகிறோம். இம் மூன்று அடிப்படை அலகுகள் ஒவ் வொன்றிற்கும் நாம் ஓர் தகுந்த அலகினைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண் டும். அவ்வாறு தெரிந்தெடுக்கப்படும் படித்தர அலகுகளுக்கு (Standard Units) இரு தகுதிகள் இருக்க வேண்டும். முதலாவது, அதனை அடைதல் எளிதாக இருக்க வேண்டும். இரண்டாவது அது மாற்றமின்றி இருத்தல் வேண்டும். தொடக்கத்தில் எளிதில் ஒப்பிடக் கூடிய அலகுகளே பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தாலும், நாளா வட்டத்தில் மாற்றமுறாத படித்தர அலகுகளின் தேவை உணரப் பட்டது.

பிரெஞ்சு முறையில் நீளத்தின் படித்தர அலகு 'மீட்டர்' (Meter) ஆகும். இது பாரீசுக் கருகில் செவ்ரே (Sevre) என்னுமிடத்தில் 0°C வெப்ப நிலையில் பாதுகாக்கப்படும் பிளாட்டினம் இரிடியம் (Platinum-iridium) கலவையாலான உலோகக் கோலொன்றின் மீது பொறிக்கப்பட்டிருக்கும் இரு கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள இடை வெளியாகும்.

இது தான் படித்தர அலகாக இருக்க வேண்டு மென்ற நியதி யில்லாவிடினும், உலக அறிவியலறிஞர்கள் இதனைப் பின்பற்றுவதே இதன் சிறப்புத் தன்மையாகும்.

ஆங்கில அளவு முறையில் படித்தர அலகு 'கஜம்' (yard) ஆகும். 62°F வெப்ப நிலையில் பாதுகாக்கப்படும் ஒரு வெண்கலக் கோலின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளின் இடைத் தூரம் ஒரு கஜம் ஆகும். அடிப்படை அலகாகிய (fundamental unit) அடி (foot) என்பது இதில் மூன்றிலொரு பகுதியாகும்.

பிரெஞ்சு முறையில் நிறையின் படித்தர அலகு 'கிலோ கிராம்' (Kilogram) ஆகும். இது அதே செவ்ரே என்னுமிடத்தில் பாது காக்கப்படும் பிளாட்டிணம் இரிடியம் கலவையாலான உலோகக் கட்டியொன்றின் நிறையாகும். ஆங்கில அளவு முறையில் படித்தர அலகு 'பவுண்டு' (Pound). அதுவே அடிப்படை அலகுமாகும்.

எல்லா அளவு முறைகளிலும் காலத்தின் அடிப்படை அலகு செகண்டு(Second)ஆகும் இதனைச் சிலசமயம் விநாடி யெனவும் கூறுவோம். ஞாயிறு தலைக்கு மேலே நேரே உச்சியிலிருந்து (Meridian) தொடங்கி மறுநாள் மீண்டும் அதே நிலைக்கு வந்து சேர எடுத்துக் கொள்ளும் காலம் ஒரு 'பரிதி நாள்' (Solar day) ஆகும். இவ்வாறு ஒரு ஆண்டின் எல்லாப் பரிதி நாட்களின் சராசரியைச் சராசரிப் பரிதி நாள் (Mean Solar day) என்போம் சராசரிப் பரிதி நாள் 24 மணிகளாகவும் (hours), 1 மணி, 3600 செகண்டுகளாகவும் பிரிக்கப்படும்.

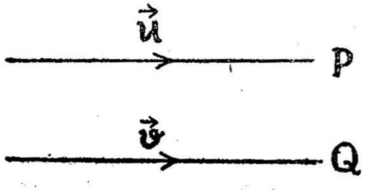
அளவீட்டு முறைகள் பொதுவாக இருவகையானவை: ஒன்று பிரெஞ்சு முறை; மற்றது ஆங்கில முறை. பிரெஞ்சு முறையில் செண்டி மீட்டர் (Centimetre), கிராம் (gram), செகண்டு (Second) ஆகியவற்றை அடிப்படை அலகுகளாகக் கொண்டுள்ள அளவீட்டு முறையே C.G.S அளவீட்டு முறை யென்றும், மீட்டர், கிலோ கிராம், செகண்டு என்பனவற்றை அடிப்படை அலகுகளாகக் கொண்டுள்ள அளவீட்டு முறையே M.K S. அளவீட்டு முறையென்றும் கூறுகிறோம். அடி, பவுண்டு, செகண்டு ஆகியவற்றை அடிப்படை அலகுகளாகக் கொண்டுள்ள ஆங்கில முறையே F.P S. முறை என்கிறோம்.

நாம் வரும் பகுதிகளில் M.K.S. முறையையே பயன்படுத்துவோம்.

33. சார்புத் திசைவேகம் (Relative velocity)

P, Q என்ற இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு மாற்றமடைந்தால், ஒன்று மற்றதைப் பொறுத்துச் சார்புத் திசைவேகம் கொண்டுள்ளது எனலாம். இச் சார்புத் திசைவேகத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம்:

P, Q என்ற இரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்கள் முறையே $\vec{u}, \vec{v}$ என்ற வெக்டார்களால் குறிக்கப்படட்டும். இரு புள்ளிகளும் ஒரே திசையில் செல்வதாகக் கொண்டால், (படல் 27) Q-வைப்



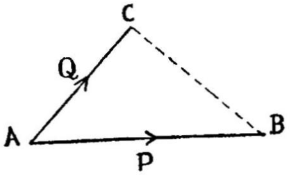
படம் 27

பொறுத்து P-யின் சார்புத் திசைவேகம் $(\vec{u} - \vec{v})$ என்ற வெக்டார் கழித்தலால் தரப்படும். அதேபோல் P-யைப் பொறுத்து Q-வின் சார்புத் திசைவேகம் $(\vec{v} - \vec{u})$ ஆகும்

எனவே, சார்புத் திசை வேகம் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகத்திலிருந்து மற்றொரு புள்ளியின் திசைவேகத்தைக் கழித்துக் கிடைக்கும் வெக்டாருக்குச் சமம். அல்லது, ஒன்றின் திசைவேகத்துடன், மற்றதன் திசை வேகத்தின் திசையை மட்டும் எதிர்த்திசையாக்கிக் கூட்டினால் கிடைக்கும் வெக்டார் சார்புத் திசைவேகத்தைக் கொடுக்கும் (வெக்டார் கழித்தல் சமன்பாடு 3.1).

மேற் கூறிய முறை இரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களின் திசைகள் எவ்வாறிருப்பினும் பொருந்துவதாகும்.

$\vec{AB}$ என்பது P-யின் திசை வேகத்தையும் $\vec{AC}$ என்பது Q-வின் திசை வேகத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம் (படம் 28)



படம் 28

Q-வைப் பொறுத்து P-யின் சார்புத் திசைவேகம் $(\vec{AB} - \vec{BC})$ ஆகும். ஆனால் $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ ஆகும். அதே போல் P-யைப் பொறுத்து Q-வின் சார்புத் திசைவேகம்

$$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே Q-வைப் பொறுத்து P-யின் சார்புத் திசைவேகம் காண வேண்டுமானால், Q-வின் திசைவேகத்தின் திசையை மட்டும் நேர் எதிராக்கி P-யின் திசை வேகத்துடன் வெக்டார் முறையில் கூட்டிக் கொள்ள வேண்டும்.

இதனை மேலும் தெளிவாகப் பின்வருமாறு கூறலாம்: சார்புத் திசை வேகம் இரு வெக்டார்களைக் கழித்துக் கிடைக்கும் வெக்டாராதலால், அவ்விரு திசைவேக வெக்டார்களுடன் சம அளவுள்ள இரு வேறு வெக்டார்களைக் கூட்டினாலும் சார்புத் திசைவேகம் மாறுவதில்லை.

P, Q என்ற இரு புள்ளிகளின் திசைவேகங்களுடனும், P-யின் திசைவேகத்திற்கு எதிர்த் திசையில் அதே எண் மதிப்புக் கொண்ட திசைவேகத்தைச் சேர்ப்போம். இப்போது P-நிலையாக இருக்க Q-வின் புதிய திசைவேகம் மேற் கூறிய வரையறைப்படி P-யைப் பொறுத்து Q-வின் சார்புத் திசை வேகத்தைக் கொடுக்கும்.

34. புவியீர்ப்பு விசையால் நிகழும் இயக்கம் (Motion under gravity)

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஒரு பொருளின் இடப்பெயர்ச்சியை x எனக் குறித்தோமானால், $\frac{dx}{dt}$ என்பது அதன் திசைவேகம் v-யையும் $\frac{d^2x}{dt^2}$ என்பது முடுக்கம் a-யையும் குறிக்கும். முடுக்கம் சீரானதாக இருந்தால் a - காலத்தைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \qquad (34{\cdot}1)$$

இதனைத் தொகு ஆக்கம் செய்தால் (t-யைப் பொறுத்து)

$$v = \frac{dx}{dt} = at + C \qquad (34{\cdot}2)$$

இதில் C என்பது v யைப் போன்ற ஓர் வெக்டார் மாறிலி. $t = 0$ ஆக உள்ளபோது $v = u$ என்றால் (u - என்பது தொடக்கத் திசைவேகமாக இருந்தால்) சமன்பாடு (34.2)-ல் பிரதியிட,

$$u = 0 + C; \text{ அல்லது } C = u \qquad (34{\cdot}3)$$

எனவே, சமன்பாடு (34·2)-ல் C-யின் மதிப்பைப் பிரதியிட,

$$v = a\,t + u \qquad (34{\cdot}4)$$

ஆனால் $v = \frac{dx}{dt}$ ஆதலால், சமன்பாடு (34·4)-ஐ மீண்டும் தொகு ஆக்கம் செய்தால்

$$x = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2 + ut + C_1$$ எனக் கிடைக்கும்.

C_1 என்பது தொகை மாறிலி (Integration constant). $t = 0$ ஆக உள்ளபோது $x = 0$ என இருந்தால், மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து

$$0 = 0 + 0 + C_1 \text{ அல்லது } C_1 = 0$$

எனவே, $$x = \tfrac{1}{2}at^2 + ut \qquad (34{\cdot}5)$$

இச் சமன்பாடு (34·5), u என்ற தொடக்கத் திசைவேகத்துடன், a என்ற சீரான முடுக்கத்துக் குட்படுத்தப்பட்ட துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு (equation of motion) ஆகும்.

புவியீர்ப்பு முடுக்கம் (acceleration due to gravity) :

ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திலிருந்து தன்னிச்சையாகத் தடையின்றிக் கீழே விழும் பொருள் தரையை அடையும்வரை அதன் திசைவேகம் உயர்ந்து கொண்டே வருகிறது. எனவே, அதன் மீது ஒரு முடுக்கம் செயல்படுகிறது. இது புவியின் ஈர்ப்பு விசையால் உண்டாகும் முடுக்கமாதலால், இதனைப் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் (acceleration due to gravity) எனக் கூறுகிறோம்.

காற்றுத்தடை யின்றிப் (air resistance) புவியின் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் தானே விழும் எந்தப் பொருளும் ஒரு சீரான புவியீர்ப்பு முடுக்கத்துக்குட்படும். இது விழும் பொருளின் வடிவத்தையோ, எடையையோ பொறுத்து மாறுவதில்லை. இப் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்புப் பொதுவாக 9·8மீட்டர்/செகண்டு/செகண்டு எனக் கொள்ளலாம். இம் முடுக்கம் எந்தப் புள்ளியிலும் புவியின் மையத்தை நோக்கும் திசையிலேயே இருக்கும். இதனைப் பொதுவாக g என்ற எழுத்தால் குறிப்போம். எனவே, சமன்பாடுகள் (34·4), (34·5) ஆகியவற்றில் a-க்குப் பதிலாக g-யைப் பிரதியிட்டால் புவியீர்ப்பால் நிகழும் இயக்கத்திற்கான சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

புவியீர்ப்பு விசையை யெதிர்த்து நேரே மேல்நோக்கி u என்ற திசைவேகத்துடன் எறியப்பட்ட ஒரு பொருளின் திசைவேகம் குறைந்து கொண்டே வந்து சுழியாகி, மீண்டும் எதிர்த் திசையில் அதிகரிக்கும். இப்போது $a = -g$ ஆதலால், சமன்பாடு (34·5) இலிருந்து அப்பொருள் அடைந்த உயரம் h ஆனல், (ஏதேனுமொரு கணம் t-யில்)

$$h = ut - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad (34{\cdot}6)$$

இதில் t என்பது h உயரம் செல்ல எடுத்துக் கொண்ட காலமாகும். (34·6)-லிருந்து t-யின் மதிப்பினைக் கணக்கிட்டால், இரு மதிப்புகள் கிடைக்கும். ஒன்று பொருள் மேல்நோக்கிச் செல்கையில் h உயரத்தைக் கடக்கும் நேரத்தையும், மற்றொன்று கீழ் நோக்கி வரும்போது அதே உயரத்தைக் கடக்கும் நேரத்தையும் கொடுக்கும்.

t-நேரத்தில் திசைவேகம் u-விலிருந்து v-ஆக மாறினல், சமன்பாடு (34·4)-லிருந்து

$$v = -gt + u$$

அல்லது $$t = \frac{u-v}{g} \qquad (34{\cdot}7)$$

இதனைச் சமன்பாடு (34·6):ல் பிரதியிட

$$h = \frac{u(u-v)}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{u-v}{g}\right)^2$$

அல்லது $gh = u(u-v) - \frac{1}{2}(u-v)^2$
$= u^2 - uv - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 + uv$

அதாவது, $u^2 - v^2 = 2gh$ (34·8)

ஒரு குறிப்பிட்ட திசைவேகம் u-வுடன் நேரே மேல்நோக்கி எறியப்படும் பொருள் அடையும் பெரும உயரத்தில் (Maximum height) $v = 0$ ஆதலால், சமன்பாடு (34·8)லிருந்து,

$u^2 - 0 = 2gH$

அல்லது $H = \frac{u^2}{2g}$ (34.9)

H- என்பது பெரும உயரத்தைக் குறிக்கும்.

h - உயரத்திலிருந்து தடையின்றித் தானே விழும் பொருளுக்கு $u=0$; $a=g$ ஆதலால், சமன்பாடு (34 5)லிருந்து

$h = \frac{1}{2}gt^2$ (34·10)

அது தரையை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் காலம்

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (34·11)

தரையை அடையும்போது அதன் திசைவேகம் v- ஆனால் சமன்பாடு (34·4) லிருந்து

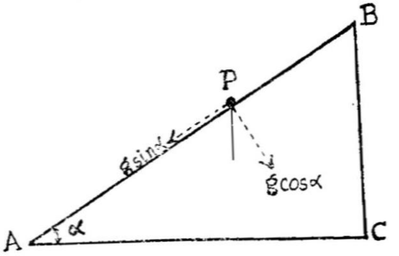
$v = gt$ (37.12)

அல்லது $v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$ (34·13)

உராய்வற்ற சாய்தளத்தில் கீழ்நோக்கிய இயக்கம்:

a- என்ற சாய்வுக் கோணமுள்ள (angle of inclination) AB - என்ற உராய்வற்ற சாய்தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு பொருளைக் காண்போம். தளம் இல்லாதிருந்தால் பொருள் நேரே கீழ் நோக்கிச் செங்குத்தாக (vertically) g என்ற முடுக்கத்துடன் வரும்.

g என்ற செங்குத்தாகக் கீழ்நோக்கிய முடுக்கத்தைத் தளத்திற் கிணையாக $g \sin a$ என்ற முடுக்கமாகவும், தளத்திற்கு நேர்க்குத்தாக $g \cos a$ என்ற முடுக்கமாகவும் பிரிக்கலாம். தளம் அதற்கு நேர்க் குத்தான இயக்கத்தைத் தடை செய்வதால், பொருள் தளத்தில் கீழ்நோக்கி வரத் தொடங்கும். எனவே, பொருள் தளத்திற் கிணையான $g \sin a$ என்ற முடுக்கத்துடன் கீழ்நோக்கித் தளத்தில் செல்லும். அமைதி நிலையிலிருந்து பொருள் கீழே வரத் தொடங்கி



படம் 29

ஞல், தளத்தின் நீளமான தொலைவு கடக்கும்போது அதன் திசைவேகம் v ஆஞல், சமன்பாடு (34·13) -ன்படி,

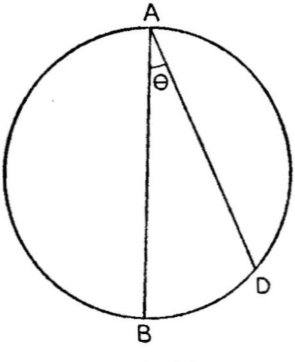
$$v = \sqrt{2 \cdot g \sin \cdot l} \qquad (34 \cdot 14)$$

ஆஞல், $\sin \alpha \cdot l$ என்பது தளத்தின் அடிப்பக்கத்தின் (base) நீளம் BC-யைக் குறிக்கும்.

$$\text{எனவே, } v = \sqrt{2g \,.BC} \qquad (34 \cdot 15)$$

எனவே தளம் இல்லாதிருந்து நேரே செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி வந்திருந்தால், அது என்ன திசைவேகத்தைப் பெற்றிருக்குமோ, அதே எண் மதிப்புள்ள திசைவேகத்தை அது தரையை அடையும் போது பெறுகிறது.

செங்குத்தான வட்டத்தின் நாண்வழியே வரும் பொருள்



படம் 30

AB என்பது வட்டத்தின் உச்சிப்புள்ளி A-வழியே செல்லும் விட்டத்தையும், AD ஏதேனுமொரு நாணையும் (Chord) குறிக்கட்டும். $\angle BAD = \theta$ என்போம். $AB = d$ என்ருல்

$$AD = d \cos \theta \qquad (13.15)$$

AD-யின் வழியே புவியீர்ப்பால் இயங்கத் தொடங்கும் பொருளின் முடுக்கம் AD யின் திசையில் g cos θ ஆகும். T என்பது AD என்ற தொலைவைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமாக இருந்தால் சமன்பாடு *(34.10)*:ன் படி

$$AD = \tfrac{1}{2} \cdot g \cos\theta \cdot T^2 \qquad (34.17)$$

எனவே *(34.16)*, *(34.17)* ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து,

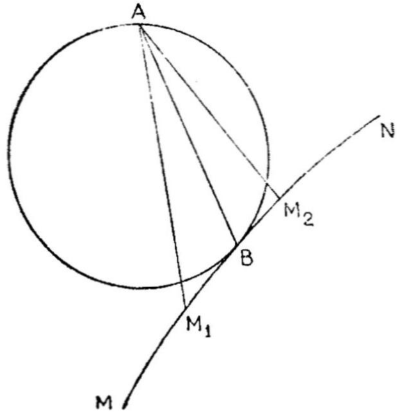
$$T = \sqrt{\frac{2.AD}{g \cos\theta}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \qquad (34.18)$$

d, g என்பன கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்துக்கு மாறிலிகளாதலால், AD போன்ற எந்த நாணின் வழியே பொருள் இறங்கினாலும் அது எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் T ஒரு மாறிலி ஆகும். இதே போன்று, செங்குத்தான வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள (Circumference) எந்தப் புள்ளியிலிருந்தும் வட்டத்தின் அடிப்புள்ளிக்கு வரையப்படும் எல்லா நாண்கள் வழியேயும் வரும் பொருட்கள் அடிப்புள்ளியைச் சமகாலங்களில் வந்தடைகின்றன என்றும் எளிதில் காட்டலாம்.

35. மீவிரைவு இறக்கக்கோடு (line of quickest descent)

ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வளைகோட்டிற்கு எந்த நேர் கோட்டின் வழியே பொருள் இறங்கினால் மிகக்குறுகிய கால அளவில் அவ்வளை கோட்டை வந்தடையுமோ அந்த நேர்க் கோட்டை மீவிரைவு இறக்கக்கோடு என்கிறோம்.

A - என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியெனவும் MN என்பது வளைகோடு (Curve) எனவும் கொள்வோம். A-யை உச்சிப்புள்ளி



படம் 31

யாகக் கொண்டு வளைவுக் கோட்டை B- என்ற புள்ளியில் தொடு மாறு ஒரு செங்குத்தான வட்டத்தை வரைவோம். இப்போது AB என்ற அவ்வட்டத்தின் நாணே மீவிரைவு இறக்கக் கோடாகும்.

ஏனெனில், Aயிலிருந்து வளைவுகோட்டின் வேறு எந்தபுள்ளி யையும் (காட்டாக M_1, M_2) அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் AB என்ற கோட்டைக் கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தை விட அதிகமாக இருக்கும்.

இதேபோன்று கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வளைவுக் கோட்டிலிருந்து P என்ற ஒரு புள்ளிக்கு மீவிரைவு இறக்கக்கோடு, அப்புள்ளியை அடிப்புள்ளியாகவும், அக்கோட்டினை Q என்ற புள்ளியில் தொட்டுக் கொண்டும் செங்குத்தாக ஒரு வட்டம் வரைந்தால், PQ என்ற நேர்க்கோடாகும்.

36. எறிபொருட்கள் (Projectiles)

முற்பகுதியில் புவியீர்ப்பு விசையால் நிகழும் நேர்க்கோடு இயக்கங்களைப் பற்றிக் கண்டோம். இப்பகுதியில் புவியீர்ப்பு விசை யால் ஒரு தளத்தில் நிகழும் இயக்கத்தைப் பற்றிக்காண்போம். முன்போலவே இப்பகுதியிலும் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் புவிக்கருகில் ஒரு மாறிலி எனவும் காற்றினால் உண்டாகும் தடை புறக்கணிக்கத் தக்கது எனவும் கொள்வோம்.

தரையிலிருந்து ஏதேனுமொரு திசையில் மேல் நோக்கி எறியப்படும் ஒரு பொருளின் இயக்கத்தின் தன்மைகளைக் காண்போம்.

எறிகோணம் (angle of projection) என்பது கிடைத் தளத்திற்கும் பொருள் எறியப்படும் திசைக்கும் இடையிலிள்ள கோணத்தைக் குறிக்கும்.

பொருளின் செல்லுகின்ற கோட்டினை, எறிபொருளின் பாதை (Path of the projectile) என்கிறோம்.

எறியப்படும் பொருள், எறியப்படும் புள்ளியிலிருந்து (Point of projection), அந்தப்புள்ளியைக் கொண்டுள்ள ஏதேனுமொரு தளத்தை (இது கிடைத்தளமாக இருக்க வேண்டியதில்லை) மீண்டும் தொடுகின்ற புள்ளி வரை உள்ள தொலைவை நெடுக்கம் (Range) என்கிறோம்.

இத்தகைய பொருட்களின் இயக்கத்தினை யறிய கிடைத் தளத்திற்கு இணையான (horizontal) இயக்கத்தையும், செங்குத் தான (vertical) இயக்கத்தையும் தனித்தனியே காண்போம். புவியீர்ப்பு முடுக்கம் செங்குத்துத் திசையில் மட்டுமே செயல் படுவதால், கிடைத்தளத்திற்கிணையான இயக்கத்தில் அதனால்

மாற்றமுண்டாவதில்லை. எனவே, கிடைத்தளத்திற்கிணையான திசைவேகக் கூறு (Component of Velocily) மாறுவதில்லை.

α என்ற எறிக்கோணத்தில் $\vec{u}$ என்ற திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு பொருளின் கிடைத்தளத் திசைவேகக்கூறு u_x என்றும், செங்குத்துத்திசையில் அதன் திசைவேகக்கூறு u_y எனவும் கொண்டால் $\vec{u} = \vec{u_x}\, \vec{i} + \vec{u_y}\, j$. (36.1)

மேலும் $|\vec{u_x}| = \vec{u} \sin \alpha$; $u_y = |\vec{u_y}| \text{Cos}\, \alpha$

அல்லது $u_x = u \sin \alpha$; $v_y = u \cos \alpha$ (36.2)

எந்த நேரத்திலும் கிடைத்தளக்கூறு $u \cos \alpha$ முடுக்கம் செயல் படாததால் மாறுவதில்லை. $u \sin \alpha$ விற்கு எதிர்த்திசையில் g என்ற முடுக்கம் செயல்படுவதால் அத்திசையில் $u \sin \alpha$ என்பதைத் தொடக்கத் திசைவேகமாகக் கொண்டு முன் பகுதியில் இயக்கப் பண்புகளை ஆராய்ந்தது போலவே இப்போதும் செய்யலாம்.

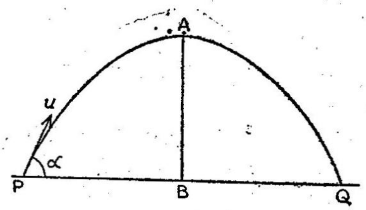
37. எறிபொருள் அடையும் பெரும உயரம் (Maximum height), அதன் பறத்தல் காலம் (time of fiiight) முதலியன காணல்.

ஒரு பொருள் P என்ற புள்ளியிலிருந்து u- என்ற திசைவேகத் துடன் α என்றஎறிகோணத்தில் செலுத்தப்படுவதாகக்கொள்வோம்.

அதன் பாதையில் அது அடையும் பெரும உயரப்புள்ளி A எனவும் அது மீண்டும் கிடைத்தளத்தை அடையும் புள்ளி Q என வும் கொள்வோம்

பெரும உயரம் (Maximum heighl) :

பொருள் பெரும உயரத்தையடையும் போது அதன்செங்குத்துத் திசை வேகம் சுழியாகும். பெரும உயரம் H எனவும், தொடக்கத் தில் செங்குத்துத் திசைவேகம் $u \sin \alpha$ எனவும், புவியீர்ப்பு முடுக்கம் g எனவும் கொண்டால், சமன்பாடு (34.8)-லிருந்து



படம் 32

$$u^2 \sin^2 \alpha - O^2 = 2 g H$$

எனவே பெரும உயரம்

$$H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (37.1)$$

பெரும உயரம் செல்ல எடுத்துக்கொண்ட காலம் :

தொடக்கத் திசைவேகம் $= u \sin \alpha$

இறுதித் திசைவேகம் $= O$

முடுக்கம் $= - g$

எனவே, சமன்பாடு (34.7)-லிருந்து பெரும உயரத்தையடைய எடுத்துக் கொண்ட காலம்,

$$t' = \frac{u \sin \alpha - O}{g} = \frac{u \sin \alpha}{g} \qquad (37.2)$$

பறத்தல்காலம் (Time of flight):

எறியப்படும் பொருள் எறிபுள்ளியின் வழியே செல்லும் கிடைத் தளத்தையோ, அல்லது வேறு தளத்தையோ மீண்டும் வந்து சேரும் வரை உள்ள கால அளவைப் பறத்தல் காலம் (time of flight) எனக் கூறுகிறோம்.

கிடைத்தளத்தைப் பொறுத்த வரை எறிபொருள் மீண்டும் கிடைத்தளத்தை Q என்ற புள்ளியில் வந்தடைந்தால், Q-வில் பொருள் அடைந்த செங்குத்து உயரம் (vertical height) சுழி யாதலால், சமன்பாடு (34.6)-ல்

$$O = u \sin \alpha \ T - \tfrac{1}{2} g T^2 \qquad (37.3)$$

இதில் T என்பது பறத்தல் காலத்தைக்குறிக்கட்டும். சமன்பாடு (37.3)ஐ

$T (u \sin \alpha - \frac{1}{2} g T) = O$ என எழுதி, T-க்கான தீர்வைக் (solution) கண்டால்,

$T = O$; $T = \dfrac{2 u \sin \alpha}{g}$ என்ற இரு தீர்வுகள் கிடைக் கின்றன.

இதில் $T = O$ என்பது எறிபொருள் எறியப்படும் கணத்தைக் குறிக்கிறது. (அப்போது செங்குத்து உயரம் சுழியாதலால்) எனவே பறத்தல் காலம்

$$T = \frac{2u \sin \alpha}{g}$$

எனவே T, பெரும உயரத்தை அடைய எறிபொருள் எடுத்துக். கொள்ளும் கால அளவைப்போல் இருமடங்காகும்.

நெடுக்கம் (Range)

கிடைத்தளத் திசைவேகம் $= u \cos a$

பறத்தல் காலம் $= T$

முடுக்கம் சுழியாவதால் (கிடைத்தளத்தில்), கிடைத்தளத்திற் கிணையாக T-என்ற கால அளவில் பொருள் செல்லும் தொலைவு

$$PQ = T \cdot u \cos a$$

எனவே நெடுக்கம் $= T \cdot u \cos a$

$$= \frac{2u^2 \sin a \cos a}{g} = \frac{u^2 \sin 2a}{g}$$

$$\therefore \quad PQ = \frac{u^2 \sin 2a}{g} \tag{37.5}$$

ஒரு குறிப்பிட்ட திசைவேகம் u-வுடன் எறியப்படும் ஒரு பொருள் அடையக் கூடிய மீப்பெரும நெடுக்கம் (maximum range) சமன்பாடு (37·5)-லிருந்து $\frac{u^2}{g}$ -க்குச் சமமாகும். ஏனெனில், அப்போது $\sin 2a$ பெரும மதிப்புடையதாக அதாவது 1-க்குச் சமமாக இருக்கும். எனவே, மீப்பெரும நெடுக்கத்துக்கு

$$\sin 2a = 1$$

அல்லது $2a = 90^\circ$

எனவே, எறிகோணம் $a = 45^\circ$

எனவே, எறிகோணம் 45° ஆக உள்ள போது நெடுக்கம் அந்தக் குறிப்பிட்ட திசைவேகத்துக்கு மீப்பெரும மதிப்புடையதாக இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட நேரத்திற்குப் பின்னர் எறிபொருளின் திசைவேகம்:

எறி பொருள் எறியப்பட்டதிலிருந்து t-நேரத்துக்குப் பின்னர் அதன் செங்குத்துத் திசைவேகக் கூறு, சமன்பாடு (34.4)-லிருந்து $[u \to u \sin a,\ a \to (-g)]$,

$$v_1 = u \sin a - gt$$

கிடைத்தளத் திசைவேகம் மாறுவதில்லையாதலால்,

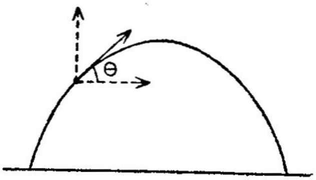
$$v_2 = u \cos \alpha$$

எனவே t-நேரத்துக்குப் பின்னர் பொருளின் திசைவேகம் V ஆனால்,

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$= u^2 - 2g\, u \sin \alpha\, t - g^2 t^2$$

எனவே $$V = \sqrt{u^2 - 2g\, u \sin \alpha\, t - g^2 t^2} \qquad (37.6)$$



படம் 33

இதன் திசை கிடைத்தளத்திற்கு θ கோணத்திலிருந்தால்

$$\tan \theta = \frac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha} \qquad (37.7)$$

இப்போது சமன்பாடு (37.5)-ஐ மீண்டும் நோக்குவோம், நெடுக்கம் PQ = R ஆனால்,

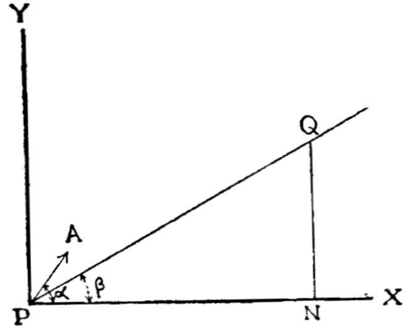
$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \text{ அல்லது } \sin 2\alpha = \frac{gR}{u^2} \qquad (37.8)$$

குறிப்பிட்ட u-வின் மதிப்புக்கு நெடுக்கம் R sin 2α-வின் மதிப்பைப் பொறுத்து அமையும். எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட R-ன் மதிப்புக்கும் 2α இரு மதிப்புக்களைக் கொண்டிருக்கும். அதாவது, 2α-வின் இரு மதிப்புக்களுக்கு ($\alpha = 45°$ என்பதைத் தவிர) sin 2α ஒரே மதிப்புடையதாக இருக்கும். இவற்றுள் 2α-வின் ஒரு மதிப்பை 2θ எனக் கொண்டால் மற்றொரு மதிப்பு $(180 - 2\theta)$ ஆக இருக்கும்.

எனவே, சமன்பாடு (37·8), $\alpha = \theta$ அல்லது $\alpha = (90 - \theta)$ என்ற இரு மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும். அதாவது, θ என்ற எறிகோணமுள்ள போதும், $(90 - \theta)$ எறிகோணமுள்ளபோதும் குறிப்பிட்ட திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் பொருளுக்கு நெடுக்கம் ஒரே அளவுடையதாக இருக்கும் $\theta = 45°$ ஆக உள்ள போது $(90 - \theta)$ வும் $45°$ ஆதலால், அப்போது நெடுக்கம் மீப்பெரும மதிப்புடையது என முன்னர் கண்டோம்.

θ, $(90-\theta)$ என்ற கோணங்கள் முறையே கிடைத்தளத்திலிருந்தும் அதற்குச் செங்குத்துத் தளத்திலிருந்தும் சம அளவில் சாய்ந்துள்ளன வாதலால், மீப்பெரும நெடுக்கத்துக்கான $45°$ எறிகோணமுள்ள திசை, இவ்விரு கோணங்களின் திசைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தை இரண்டு சம கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.

38. எறிபுள்ளியின் வழியே செல்லும் சாய்தளத்தில் நெடுக்கம் (Range on an inchined plane): சாய்கோணம் (angle of inclination) β உள்ள ஒரு சாய்தளத்தில் α-எறிகோணத்தில் u என்ற திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் பொருளைக் காண்போம். பொருள் தளத்தின் மீப்பெருமச் சாய்வுக் கோட்டைக் (line of greatest slope) கொண்டுள்ள செங்குத்துத் தளத்தில் எறியப்பட வேண்டும். PQ என்பது அக்கோடானால், Q என்பது சாய்தளத்தில் விழும் புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். PQ என்பது சாய்தளத்தில் நெடுக்கமாகும். (படம் 34). QN என்பது கிடைத்தளத்திற்கு Q-வின் வழியே வரையப்பட்ட நேர்குத்துக் கோடு. எறியப்படும் பொருளின் திசைவேகத்தைத் தளத்துக்கு இணையாகவும், தளத்துக்கு நேர்க்குத்தாகவும், இரு கூறுகளாகப் பிரித்தால், தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான இயக்கத்துக்குத் தொடக்கத் திசைவேகம் $u \sin(\alpha-\beta)$ ஆகும்



படம் 34

அத் திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு $(-g \cos \beta)$ ஆகும். பொருள் மீண்டும் தளத்தை அடையும் போது தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான திசையில் பொருள் கடக்கும் தொலைவு சுழியாகும். எனவே, பறத்தல் காலம் T எனக் கொண்டால், சமன்பாடு (34.6)-லிருந்து

$$0 = u \sin(\alpha-\beta).\, T - \tfrac{1}{2} g \cos\beta\, T^2$$

அல்லது பறத்தல் காலம்

$$T = \frac{2u \sin(\alpha-\beta)}{g \cos\beta} \qquad (38.1)$$

இந்த நேரத்தில் கிடைத்தளத்துக்கிணையான திசைவேகக் கூறு $u \cos \alpha$ மாறுவதில்லையாதலால், கிடைத்தளத்துக்கிணையாகப் பொருள் சென்ற தொலைவு

$$PN = \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos\beta} \tag{38.2}$$

ஆனல், சாய்தளத்தில் நெடுக்கம் R=PQ ஆதலால்

$$R = PQ = \frac{PN}{\cos\beta}$$

எனவே, $$R = \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta} \tag{38.3}$$

சாய்தளத்தில் மீப்பெரும நெடுக்கம் : கொடுக்கப்பட்ட சாய்தளத்தில் குறிப்பிட்ட திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் பொருளின் மீப்பெரும நெடுக்கத்தைப் பின்வருமாறு பெறலாம்:

சமன்பாடு (38·3)-ன் படி நெடுக்கம்

$$R = \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

அதாவது $$R = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}\left\{\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta\right\} \tag{38.4}$$

இதில் u, β, g என்பன நிலையான மதிப்புக்களைக் கொண்டிருந்தால், $\sin(2\alpha-\beta)=1$ என ஆகும் போது R பெரும மதிப்புடையதாக இருக்கும். எனவே, சாய்தளத்தில் பெரும நெடுக்கத்துக்கு

$$\sin(2\alpha-\beta) = 1$$

அல்லது $$2\alpha-\beta = 90^\circ$$

$$\therefore \quad \alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2} \tag{38.5}$$

எனவே, எறிகோணம் $\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)$ ஆக உள்ள போது நெடுக்கம் பெரும மதிப்புடன் இருக்கும். இந் நிலையில் $(\alpha-\beta)=(90-\alpha)$ ஆதலால், தளத்துக்கும் செங்குத்துக் கோட்டுக்கும் இடையிலிருக்கும் கோணத்தை இத்திசை $\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right)$ இருசமமாகப் பிரிக்கும்.

$\therefore$ படம் 34-ல் $\angle APQ = (\alpha-\beta)$; ஆனல், $(90-\alpha) = \angle APY$ பெரும நெடுக்கத்தின் மதிப்பு, சமன்பாடு (38.4)-லிருந்து

$$R_m = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}(1-\sin\beta)$$

$$= \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin^2\beta)}$$

$$= \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$$

$$\therefore \quad R_m = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)} \qquad (38.6)$$

சமன்பாடு (38.4)-ன் படி ஒரு குறிப்பிட்ட சாய்தளத்தில், குறிப்பிட்ட u, Rஆகிய மதிப்புக்களுக்கு $\sin\ (2a-\beta)$ ஓர் மாறிலியாகும். ஒரு சைன் (sine) மதிப்புக்கு 180° க்குக் குறைந்த இரு கோணங்கள் உண்டாதலால், ஒன்று θ-ஆனல், மற்றொன்று $(180^\circ-\theta)$ ஆக இருக்கும்.

$$\therefore \quad \theta = (2a-\beta)$$

அல்லது $\quad a = \dfrac{\beta+\theta}{2}$

மேலும், $(180-\theta) = (2a-\beta)$

ஆனல் $\qquad a = 90+\dfrac{\beta-\theta}{2}$ ஆகும்.

எனவே, $\left(\dfrac{\beta+\theta}{2}\right)$ என்ற எறிகோணத்துக்கும் $\left\{90+\dfrac{(\beta+\theta)}{2}\right\}$ என்ற எறிகோணத்துக்கும் நெடுக்கம் ஒரே அளவினதாக இருக்கும்.

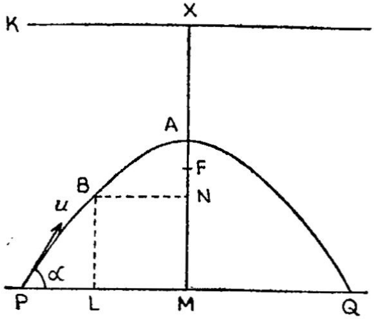
மேலும் $\quad \frac{1}{2}\left(\dfrac{\beta+\theta}{2}+90+\dfrac{\beta-\theta}{2}\right) = 45+\dfrac{\beta}{2}$ ஆதலால் இவ் எறிகோணங்களின் திசைகளும், பெரும நெடுக்கத்துக்கு எறிய வேண்டிய திசைக்குச் சம அளவில் சாய்ந்திருக்கின்றன.

39. எறிபொருளின் பாதை ஒரு பரவளையம் (Path of a projectile is a parabola)

u எறிபொருளின் திசைவேகமாகவும், a எறிகோணமாகவும் உள்ளபோது, எறிபொருள் அடையும் பெரும உயரம் சமன்பாடு (37.1)-ன் படி

$$H = \frac{u^2\sin^2 a}{2g} \qquad (39.1)$$

படத்தில் AM = H ஆகும். மேலும், சமன்பாடு(37.2)-லிருந்து H உயரம் அடைய (A-யை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம்)



படம் 35

$\left(\dfrac{u \sin a}{g}\right)$ எனவும் கண்டோம். இந்த நேரத்தில் அது கிடைத் தளத்துக்கிணையாகச் சென்ற தொலைவு PM ஆகும். எனவே

$$PM = \frac{u \sin a}{g} u \cos a$$

$$\therefore \quad PM = \frac{u^2 \sin a \cos a}{g} \qquad (39.2)$$

B என்பது எறிபொருளின் பாதையில் ஏதேனுமொரு புள்ளியையும், BN என்பது அப்புள்ளியிலிருந்துAM-க்கு வரையப்பட்ட நேர்க் குத்துக் கோட்டையும், t என்பது துகள் அல்லது பொருள் B-யை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் காலத்தையும் குறித்தால், BL என்பது t-நேரத்தில் பொருள் அடைந்த செங்குத்து (vertical) உயரத்தைக் குறிக்கும். இத் திசையில் திசைவேகக் கூறு $u \sin a$ ஆதலால், சமன்பாடு (36.4)-ன் படி,

$$BL = u \sin a \, t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (39.3)$$

மேலும் $$PL = u \cos a . t \qquad (39.4)$$

ஆனால், AN = AM—NM = AM—BL ஆதலால், சமன்பாடுகள் (39.1), (39.3) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$AN = \frac{u^2 \sin^2 a}{2g} - u \sin a . t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{g}{2}\left(\frac{u \sin a}{g} - t\right)$$

எனவே $$\left(\frac{u \sin \alpha}{g} - t\right) = 2\frac{AN}{g} \qquad (39.5)$$

மேலும், BN=LM=PM−PL ஆதலால், சமன்பாடு (39.2) (39.4) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$BN = \frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - u \cos \alpha . t$$

அதாவது $$BN = u \cos \alpha \left(\frac{u \sin \alpha}{g} - t\right) \qquad (39.6)$$

எனவே $$BN^2 = u^2 \cos^2 \alpha \left(\frac{u \sin \alpha}{g} - t\right)^2$$

இதில் சமன்பாடு (39.5)-ஐப் பயன்படுத்த

$$BN^2 = u^2 \cos^2 \alpha . \frac{2AN}{g}$$

அல்லது $$BN^2 = \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} . AN \qquad (39.7)$$

இப்போது $AF = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$ உள்ளவாறு AM என்ற கோட்டில் A-க்குக் கீழே F என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டோமாயின்,

$$BN^2 = 4.AF.AN \qquad (39.8)$$

இது "$y^2 = 4ax$" என்ற வடிவத்திலுள்ளதால், இது AN என்ற கோட்டை அச்சுக்கோடாகவும் A-யை முனைப் புள்ளியாகவும், நேரகலத் தொலைவு (latus recturn) 4.AF ஆகவும் உள்ள ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும் சமன்பாடு ஆகும்.

எனவே, எறிதுகளின் பாதை ஒரு பரவளையமாகும்.

குறிப்பு : (1) நேரகலத் தொலைவு $4.AF = \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ என்பது $u \cos \alpha$ என்ற திசைவேகக் கிடைத்தளத் கூறை மட்டுமே பொருத்தது. எனவே பரவளையத்தின் அளவும் அதனை மட்டுமே பொறுத்திருக்கும்.

(2) P-யின் வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்திலிருந்து F-ன் உயரம்

$$FM = AM - AF$$
$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$
$$= -\frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

எனவே, α, 45°-க்குக் குறைவாக இருந்தால், FM எதிர்க்குறியுடையதாக இருக்கும். அதாவது, F என்ற புள்ளி PQ-வுக்குக் கீழே இருக்கும். F என்பது பரவளையத்தின் குவியம் (focus) ஆகும்.

(3) எந்தப் புள்ளியிலும் எறிதுகளின் திசைவேகத்தின் எண்மதிப்பு, அதன் பாதைப் பரவளையத்தின் நேரகலக் கோட்டிலிருந்து, தடையின்றித் தானே விழும் பொருள் அப்புள்ளியை அடையும் போது பெறும் திசை வேகத்தின் எண்மதிப்புக்குச் சமமாக இருக்கும்.

படத்தில் KX என்பது நேரகலக் கோடானால்

$$AX = AF = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

ஏதேனுமொரு B என்ற புள்ளியில் பொருளின் திசைவேகம் v ஆனால், சமன்பாடு (37.6)-லிருந்து

$$v^2 = u^2 - 2u\, g \sin \alpha . t + g^2 t^2$$

$$= 2g\left[\frac{u^2}{2g} - (u \sin \alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2)\right]$$

ஆனால், $MX = MA + AX$

$$= \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2k} + \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

$$= \frac{u^2}{2g}$$

மேலும் சமன்பாடு (39.3)-லிருந்து

$$MN = BL = u \sin \alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

எனவே, $v^2 = 2g\,[MX - MN]$

$$\therefore \quad v^2 = 2g . NX \qquad (39.9)$$

இதனைச் சமன்பாடு (34.13)-உடன் ஒப்பிட்டால், v-என்பது நேரகலக் கோட்டிலிருந்து தானே விழும் பொருள் B-யை அடையும் போது பெறும் திசை வேகத்துக்குச் சமம் என்பது புலப்படும்.

40. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்கக் கணக்கு (1) : F. P. S அலகுகளில் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பு 32.1 அடி/(செகண்டு)^2 ஆனால், M. K. S அலகுகளில் அதன் மதிப்பினைக் கணக்கிடுக.

F. P. S அலகுகளில் M_1, L_1, T_1 என்பன முறையே நிறை, நீளம், காலம் ஆகியவற்றின் அடிப்படை அலகுகளெனவும், M_2, L_2, T_2 என்பன M. K. S முறையில் முறையே நிறை, நீளம், காலம் ஆகியவற்றின் அடிப்படை அலகுகளெனவும் கொள்வோம்.

புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் பரிமாணம்

$$= [LT^{-2}]$$

எனவே, F. P. S அலகில் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பு

$$= 32.1\ [L_1T_1^{-2}]$$

M. K. S அலகில் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பு

$= x[L_2\ T_2^{-2}]$ எனக் கொள்வோம்.

எனவே, $x\ [L_2T_2^{-2}] = 32.1\ [L_1T_1^{-2}]$

$$x = 32.1 \left[\frac{L_1}{L_2}\right] \left[\frac{T_1^{-2}}{T_2^{-2}}\right]$$

1 அடி = 0.3048 மீட்டர். காலத்தின் அலகு இரு முறைகளிலும் செகண்டுதான். எனவே

$$x = 32.1 \times 0.3048 \times 1$$

$= 9.783$ மீட்டர்/(செகண்டு)^2

(2) l நீளமும், b அகலமும், d உயரமும் கொண்ட ஒரு நீண்ட தண்டின் மையப் புள்ளியில் M என்ற நிறையை வைப்பதால் மையப் புள்ளி x தொலைவு கீழிறங்குகிறது. குணகம் y ஆனால்,

$$x = \frac{Mg\ l^3}{4\ bd^3\ y}$$

என்ற சமன்பாட்டின் பரிமாணங்களைச் சரிபார்க்க

x என்பது தொலைவைக்குறித்தால் அதன் பரிமாணம் $= [L]$

M-ன் பரிமாணம் $= [M]$

L, ன் பரிமாணம் $= [L]$

b-ன் பரிமாணம் $= [L]$

d-யின் பரிமாணம் $= [L]$

g-யின் பரிமாணம் $= [LT^{-2}]$

$y = \dfrac{\text{தகைவு}}{\text{திரிபு}}$ ஆதலால்,

$$[y] = \left(\frac{\text{விசை/பரப்பு}}{\text{நீளம்/நீளம்}}\right)$$

$$= \left(\frac{MLT^{-2}}{M\ L}\right)$$

$$= [ML^{-1}T^{-2}]$$

எனவே, சமன்பாட்டில்

$$L = \frac{[M]\,[LT^{-2}]\,[L^3]}{[L]\,[L^3]\,[ML^{-1}T^{-2}]} = \frac{ML^4T^{-2}}{ML^3T^{-2}} = L$$

எனவே, சமன்பாடு பரிமாணப்படி சரியானதாகும்.

விளக்கக் கணக்கு (3): E என்ற மீட்சிக் குணகமுள்ள ஒரு ஊடகத்தின் வழியே ஒலியின் வேகம் E-யையும், அதன் அடர்த்தி P-வையும் பொருத்திருந்தால், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பினைப் பெறுக.

v என்பது ஒலியின் வேகமானுல்,

$$v = K\,E^x\,P^y$$

எனக்கொள்வோம். (K-ஓர் மாறிலி)

v-யின் பரிமாணம் $= [LT^{-1}]$

E-யின் பரிமாணம் $= [ML^{-1}\ T^{-2}]$

ρ-யின் பரிமாணம் $= [ML^{-3}]$

எனவே சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் பரிமாணங்களை எழுதினுல்

$$[LT^{-1}] = [ML^{-1}T^{-2}]^x\,[ML^{-3}]^y$$

$$M[M^{x+y}]\,[L]^{-x-3y}\,[T]^{-2x}$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து

$$x+y = 0$$

$$-x-3y = 1$$

$$-2x = -1$$

எனக் கிடைக்கிறது.

ஆதலால், $x = \frac{1}{2};\ y = -\frac{1}{2}$

எனவே, $v = KE^{\frac{1}{2}}\,\rho^{-\frac{1}{2}}$

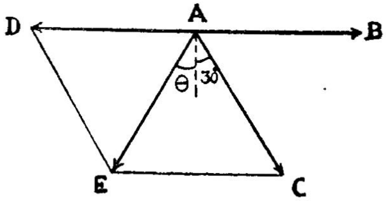
$$= K\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

விளக்கக் கணக்கு (4):

ஒரு புகைவண்டி கிடைத்தளத்தில் மணிக்கு 40 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் சென்று கொண்டுள்ளது. அதே திசையில் வீசும் காற்று

மழைத்துளிகளைச் செங்குத்துக் கோட்டுக்கு 30° கோணத்தில் விழச் செய்கிறது. மழைத்துளிகளின் வேகம் மணிக்கு 20 கிலோமீட்டரானால், புகைவண்டியில் செல்லும் ஒருவருக்கு மழைத்துளி எந்தத் திசையில் வீழ்வதாகத் தோன்றும்?

AB என்பது புகைவண்டியின் திசைவேகத்தையும், AC என்பது மழைத்துளிகளின் திசைவேகத்தையும் குறிக்கின்றன.



படம் 36

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ என்ற கோட்டை வரைகிறோம். AD, AC ஆகியவற்றின் தொகுபயன் AE ஆனால், AE என்பது வண்டியினுள்ளிருந்து பார்க்கும்போது மழைத்துளி விழும் திசையைக் குறிக்கும்.

$\triangle$ACE-யில்,

$$\frac{CE}{AC} = \frac{\sin \angle EAC}{\sin \angle AEC}$$

$$= \frac{\sin (\theta + 30)^\circ}{\cos \theta}$$

எனவே, $$\frac{40}{20} = \frac{\sin \theta \cos 30^\circ + \cos \theta \sin 30^\circ}{\cos \theta}$$

$\therefore$ $$2 = \tan \theta \cos 30^\circ + \sin 30^\circ$$

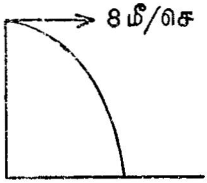
$\therefore$ $$\tan \theta = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\cos 30^\circ} = \sqrt{3}$$

எனவே, $\theta = 60^\circ$.

எனவே, மழைத்துளி வீழ்வதாகத் தோன்றும் திசை, மெய்யாக விழும் திசைக்கு நேர்குத்தாக உள்ளது.

விளக்கக் கணக்கு (5):

ஒரு பந்து கிடைத்தளத்திற் கிணையாக 8 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்துடன் எறியப் படுகிறது. $\frac{1}{4}$ செகண்டுக்குப் பின்னர் அதன் இருப்பிடத்தையும் திசைவேகத்தையும் காண்க.



படம் 37

தொடக்கத்தில் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகக் கூறு சுழியாகும். கிடைத்தளக்கூறு நிலையான 8 மீட்டர்/செகண்டு என்ற மதிப்புடனிருக்கும்.

$\frac{1}{4}$ செகண்டுக்குப் பின்னர் கிடைத் தளத்திற்கிணையாகக் கடந்த தொலைவு $x = v_x t$

$$= 8 \times \tfrac{1}{4} = 2 \text{ மீட்டர்.}$$

செங்குத்துத் திசையில் கடந்த தொலைவு y ஆனால்,

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2$$
$$= -\tfrac{1}{2} \times 980 \times (\tfrac{1}{4})^2$$
$$= -0{\cdot}3062 \text{ மீட்டர்.}$$

திசைவேகக் கூறுகளைக் கணக்கிடுவோம்.

$$v_x = v_0 = 8 \text{ மீட்டர்/செகண்டு}$$
$$v_y = -gt = -9{\cdot}8 \times \tfrac{1}{4}$$
$$= -2{\cdot}45 \text{ மீட்டர்/செகண்டு}$$

எனவே, $\frac{1}{4}$ செகண்டுக்குப் பின்னர் திசைவேகம்

$$= \sqrt{8^2 + (-2{\cdot}45)^2}$$
$$= 8{\cdot}366 \text{ மீட்டர்/செகண்டு}$$

இது கிடைத் தளத்திற்கு θ கோணத்திலிருந்தால்,

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$= -\frac{2{\cdot}45}{8} = -0{\cdot}306$$

எனவே $\theta = -17^\circ$.

விளக்கக் கணக்கு (6):

ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு 196 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் தரைக்கு 30° கோணத்தில் வெளிப்படுகிறது. (i) அது

அடையும் பெரும உயரம் என்ன? (ii) கிடைத்தளத்தில் அதன் நெடுக்கம் என்ன? பறத்தல் காலம் எவ்வளவு? (iii) அது 100 மீட்டர் செங்குத்து உயரத்திலுள்ளபோது அதன் திசைவேகம் என்ன?

தொடக்கத்தில் கிடைத்தளத்திற்கிணையான திசைவேகக் கூறு

$$= 196 \cos 30° = 196 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 98\sqrt{3} \text{ மீட்டர்/செகண்டு.}$$

தொடக்கத்தில் செங்குத்துத் திசைவேகக்கூறு

$$= 196 \sin 30° = 98 \text{ மீட்டர்/செகண்டு.}$$

(i) குண்டு அடையும் பெரும உயரம் h ஆனல், h உயரத்தை அடையும்பொது செங்குத்துத் திசைவேகக் கூறு சுழியாகும்.

எனவே,

$$O = 98^2 - 2gh$$

எனவே $$h = \frac{98^2}{2 \times 9{\cdot}8} = 490 \text{ மீட்டர்.}$$

(ii) பறத்தல் காலம் t ஆனுல், t காலத்தில் அடைந்த செங்குத்து உயரம் சுழியாகும். (மீண்டும் தரையில் படுதலால்)

எனவே, $$O = 98t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

$$t^2 = \frac{98t}{g} \times 2$$

∴ $$t = 20 \text{ செகண்டுகள்}$$

கிடைத்தளத்தில் நெடுக்கம்

$$= \text{கிடைத்தளத் திசை வேகக்கூறு} \times 20$$
$$= 20 \times 98 \times \sqrt{3}$$
$$= 3404 \text{ மீட்டர்.}$$

(iii) 100 மீட்டர் உயரத்தில் உள்ளபோது குண்டின் திசைவேகம் v எனவும், கிடைத் தளத்துடன் அதன் திசை உண்டாக்கும் கோணம் θ எனவும் கொள்வோம். v_x, v_y என்பன திசைவேகம் v-யின் கிடைத்தளக் கூறையும், செங்குத்துக் கூறையும் குறித்தால்

$$v_x^2 = (98\sqrt{3})^2 = 3 \times 98^2$$
$$v_y^2 = 98^2 - 2g{\cdot}100 = 98^2 - 2 \times 9{\cdot}8 \times 100$$

∴ $$v_y^2 = 98 \times 78$$

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 = 98 \times 78 + 3 \times 98^2$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{98 \times 372}$$

$$= 190{\cdot}6 \text{ மீட்டர்/செகண்டு.}$$

மேலும், $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x} = \sqrt{\dfrac{98 \times 78}{3 \times 98^2}} = \sqrt{\dfrac{78}{294}}$

$$= 0{\cdot}459$$

எனவே, $\theta = 24^\circ\ 45'$

விளக்கக் கணக்கு (7):

β சாய்கோணமுள்ள சாய்தளத்தின் அடிப்புள்ளியிலிருந்து, α என்ற எறிகோணத்தில் ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. $\cot\beta = 2\tan(\alpha-\beta)$ ஆனால், துகள் சாய்தளத்தின் மீது நேர்க்குத்தாக வந்து விழுமெனக் காட்டுக.

u என்பது துகள் எறியப்படும் வேகமானால், சாய்தளத்துக் கிணையான திசைவேகக் கூறு $= u\cos(\alpha-\beta)$; சாய்தளத்துக்கு நேர்குத்தான திசையில் திசைவேகக் கூறு $= u\sin(\alpha-\beta)$.

இவ்விரு திசைகளில் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் கூறு முறையே $-g\sin\beta$, $-g\cos\beta$ ஆகும்.

சமன்பாடு (38.1)-லிருந்து பறத்தல் காலம்

$$T = \frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

துகள் மீண்டும் சாய்தளத்தை நேர்குத்தாக வந்து சந்தித்தால், சாய்தளத்துக் கிணையான திசைவேகக் கூறு அப்புள்ளியில் சுழியாக வேண்டும். எனவே,

$$u\cos(\alpha-\beta) - g\sin\beta \cdot T = 0$$

அல்லது $T = \dfrac{u\cos(\alpha-\beta)}{g\sin\beta}$

$$\therefore \quad \frac{u\cos(\alpha-\beta)}{g\sin\beta} = \frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

அல்லது $\cot\beta = 2\tan(\alpha-\beta)$.

எனவே, $\cot\beta = 2\tan(\alpha-\beta)$ ஆக இருக்கும்போது துகள் சாய்தளத்தை நேர்குத்தாக வந்தடையும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள் :

1. F. P. S. முறையில் திறனின் அலகு 1 குதிரைத்திறன். M, K. S. முறையில் திறனின் அலகு 1 வாட் (Watt). 1 குதிரைத் திறன் எத்தனை வாட் எனக் கணக்கிடுக.

[1 குதிரைத் திறன் (Horse power) = 550 அடிப்பவுண்டு/செ]

2. ஒரு துகள் சீரான வட்ட இயக்கத்திலுள்ளது. அதன் முடுக்கம், வட்டத்தின் ஆரம், கோணத் திசைவேகம் இவற்றிற் கிடையேயுள்ள தொடர்பினைப் பரிமாண முறையில் நிறுவுக.

3. இரு புள்ளிகளிடையே இழுத்துக் கட்டப்பட்ட ஒரு கம்பியின் அதிர்வெண், கம்பியின் நீளம், அலகு நிறை (mass per unit length), அதன் இழுவிசை ஆகியவற்றைப் பொறுத்ததானால் அவற்றிற்கிடையே யுள்ள தொடர்பினை நிறுவுக.

4. சுழலும் ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல் அப்பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன், கோணத் திசைவேகம் ஆகியவற்றைப் பொறுத்தது. அவற்றிற்கிடையே யுள்ள தொடர்பினை நிறுவுக.

5. திரவ மட்டத்திலிருந்து h ஆழத்தில் உள்ள ஓர் புள்ளியில் அழுத்தம், ஆழம் h, புவியீர்ப்பு முடுக்கம், திரவத்தின் அடர்த்தி ஆகியவற்றைப் பொறுத்தது. பரிமாண முறையில் அவைகளுக் கிடையே யுள்ள தொடர்பை நிறுவுக.

6. மணிக்கு 3 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் நடந்து செல்லும் ஒருவனுக்கு மழைத்துளி செங்குத்தாக வீழ்வதாகத் தோன்றுகிறது. அவன் தனது வேகத்தை மணிக்கு 6 கிலோமீட்டராக உயர்த்தும் போது மழைத்துளி செங்குத்துக் கோட்டுக்கு 45° கோணத்தில் அவனை வந்தடைகிறது. மழை விழும் திசையையும், திசைவேகத் தையும் கணக்கிடு.

7. மணிக்கு 2 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் நீந்தக்கூடிய ஒருவன் ஒரு ஆற்றைக் கடக்கிறான். அகலம் 200 மீட்டராகவும், நீரின் வேகம் மணிக்கு 1 கிலோமீட்டராகவும் இருந்தால், அவன் அதனைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் காலம் எவ்வளவு?

8. P என்ற புள்ளியில் இரு சாலைகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன. ஒரு சாலையின் வழியே P-யை நோக்கிச் செல்லும் A என்பவன், P-யில் B என்பவனைப் பார்க்கிறான். B- மற்றொரு சாலையின் வழியே மணிக்கு 4 கிலோ மீட்டர் வேகத்தில் நடக்கிறான். A, B-யைப் பார்க்கும்போது P-யிலிருந்து 100 மீட்டர் தொலைவில் P-யை நோக்கி மணிக்கு 3 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் வந்து கொண்டிருந்தால், இருவரும் எப்போது மிக அருகில் இருப்பார்கள்?

9. உயரத்தில் உள்ள ஒரு பொருளை நோக்கித் துப்பாக்கி குறி வைக்கப்படுகிறது. குண்டு வெளிவரும் அதே கணத்தில் பொருள் தானே கீழே விழத் தொடங்குகிறது. குண்டு பொருளின் மீது மோதிவிடு மெனக் காட்டு.

10. கிடைத் தளத்திற் கிணையாக 1·5 மீட்டர் உயரத்திலுள்ள ஒரு பலகையிலிருந்து உருண்டு வந்த ஒரு பந்து, பலகையின் விளிம்பிலிருந்து 2 மீட்டர் தொலைவில் விழுந்தால், அது விழத் தொடங்கும்போது அதன் வேகம் என்ன?

11 1960 மீட்டர் உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு விமானத்திலிருந்து ஒரு குண்டு கீழே விடப்படுகிறது. விமானத்தின் வேகம் மணிக்கு 180 கிலோமீட்டர் என்றால், குண்டு தரையில் எந்த இடத்தில், எப்போது, என்ன திசைவேகத்துடன் விழும்.

12. ஒருவன் ஒரு கால் பந்தை தரைக்கு 37° கோணத்தில் 19·6 மீட்டர்/செகண்டு வேகத்தில் செல்லுமாறு உதைக்கிறான். உதைக்கும் திசையில் 50 மீட்டர் தொலைவில் உள்ள மற்றொருவன் அப்பந்தை நோக்கி அதே கணத்தில் ஓடத் தொடங்குகிறான். பந்து தரையைத் தொடுவதற்கு முன் அவன் அதனை அடைய வேண்டுமானால் அவனது வேகம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

13 ஒரு பீரங்கியிலிருந்து வெளிவரும் குண்டு 10 செகண்டுகளுக்குப் பின்னர் அதே கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு இடத்தில் வெடிக்கிறது. வெடிக்கும் ஒலி மேலும் 3 செகண்டுகள் கழித்துப் பீரங்கி உள்ள இடத்தை அடைகிறது. ஒலியின் வேகம் 350 மீட்டர்/செகண்டு எனக் கொண்டு, குண்டு வெளிவரும் வேகத்தையும், திசையையும் கணக்கிடு.

14. கிடைத்தள நெடுக்கம், பெரும உயரத்தைப் போல மூன்று மடங்குள்ளவாறு ஒரு பொருள் எறியப்படுகிறது. எறி கோணத்தைக் கணக்கிடுக. நெடுக்கம் 300 மீட்டராக இருக்க வேண்டுமானால், எறியப்படும் திசைவேகத்தையும் பறத்தல் காலத்தையும் கணக்கிடுக.

15. கொடுக்கப்பட்ட திசைவேகத்தில் எறியப்படும் ஒரு பொருளின் பெரும நெடுக்கம் கிடைத்தளத்தில் 3000 மீட்டர். கிடைத்தளத்துக்கு 30° சாய்ந்துள்ள ஒரு தளத்தின் மீது அதன் நெடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. (மேலும், கீழும்).

16. 30° சாய் கோணமுள்ள ஒரு தளத்திலிருந்து, அத்தளத்துக்கு நேர்குத்தாக ஒரு பொருள் 40 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் எறியப்படுகிறது. தளத்தின் மீது நெடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

17. 30° சாய்கோணமுள்ள சாய்தளத்தி னடியிலிருந்து 60° கோணத்தில் எறியப்படும் ஒரு பொருளின் தொடக்க வேகம் 1000 மீட்டர்/செகண்டு ஆனல், அத்தளத்தின்மீது நெடுக்கம் எவ்வளவு?

18. ஒரு குன்று கிடைத்தளத்துக்கு 30° கோணத்தில் அமைந்துள்ளது. குன்றின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே வேகத்துடன் இரு பொருட்கள் எறியப்படுகின்றன. ஒன்று கிடைத் தளத்துக்கு 45° மேல் நோக்கியும், மற்றொன்று 45° கீழ்நோக்கியும் எறியப்பட்டால், ஒன்றின் நெடுக்கம், மற்றொன்றின் நெடுக்கத்தைப் போல ஏறத்தாழ 3·75 மடங்கிருக்குமெனக் காட்டுக.

41. கணத்தாக்கு (Impulse)

அணுவிலும், அணுக்கருவிலும் உள்ள துகள்கள் பற்றிய பல உண்மைகளைச் சோதனை வாயிலாக, அவற்றினிடையே நிகழும் மோதல்களின் விளைவுகளை ஆய்வதன் மூலம் அறிய இயலும். சற்றுப் பெருமளவில், வாயுக்களின் பண்புகளை அவற்றின் மூலக் கூறுகளின் (molecules) மோதல்களைக் கொண்டு அறிய முடியும். இப்பகுதியிலும் வரும் பகுதிகளிலும் உந்த அழிவின்மை (conservation of momentum), ஆற்றல் அழிவின்மை (conservation of energy) ஆகிய கொள்கைகளிலிருந்து மோதல்கள் பற்றிப் பெறுகின்ற உண்மைகளைக் காண்போம்

ஒரு மோதலின்போது (Impact), மிகப் பெரிய விசையொன்று, மிகக் குறுகிய காலத்தில் செயல்படுகின்றது. கிரிக்கெட் பந்தை மட்டையால் அடிக்கும்போது உண்டாகும் மோதல், ஒரு அணுக் கருத் துகள் (nuclear particle) மற்றொன்றின் மீது மோதுதல் முதலியவை இத்தகைய மோதலுக்கு எடுத்துக் காட்டுகளாகும். இவ்வாறு மிகக் குறுகிய காலமே செயல்படும் மிகப்பெரிய விசையைத் தாக்கு விசை (Impulsive force) என்கிறோம். இக் குறுகிய கால அளவில் துகளின் இடமாற்றம் புறக்கணிக்கத் தக்க தாக இருக்கும்.

நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி உந்த மாறுபாட்டு நேர வீதம் செயல்படுகின்ற விசைக்குச் சமமாதலால் $\vec{p}$ என்பது உந்தத் தைக் குறித்தால்,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{41·1}$$

அல்லது $\quad d\vec{p} = \vec{F}\,dt$

மோதலில் விசை செயல்படும் நேரம் 't' ஆக இருந்தால் அந்தக்கால அளவிற்குள் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாற்றம்,

$$\int d\vec{p} = \int_0^t \vec{F}\, dt \qquad (41\ 2)$$

விசை செயல்படுகின்ற கால அளவில், விசையின் நேரத்தைப் பொறுத்த தொகு ஆக்கம் (Integration) கணத்தாக்கு அல்லது தாக்கு (Impulse) எனப்படும்.

எனவே

$$\text{தாக்கு} = \int_0^t \vec{F}\, dt \qquad (41{\cdot}3)$$

ஆதலால், ஒரு பொருளின்மீது தாக்குவிசை செயல்படுவதால் உண்டாகும் உந்த மாறுபாடு அதன் தாக்குக்குச் சமம்.

42. மோதல் (Impact)

ஒரு வழவழப்பான தரைக்குமேலே ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திலிருந்து வெவ்வேறு பொருட்களாலான பந்துகளைத் தரையின் மீது விழச் செய்வோமானால், அவை தரையிலிருந்து மீண்டு மேலெழும்பும் உயரம் பொருட்களுக்குத் தக்கவாறு மாறும். காட்டாக, அவ்வாறு கீழே விடப்படும் கண்ணாடிப் பந்து மரத்தாலான பந்தை விட அதிக உயரம் மேலெழும்பும். ஆனால், இரண்டும் ஒரே உயரத்திலிருந்து விடப்படுகின்றனவாதலால், அவை தரையை அடையும் போது பெறும் திசைவேகங்கள் சமமாதல் வேண்டும். அவை மீண்டு மேலெழும்பும் திசைவேகங்கள் சமமாயிராததால்தான் அவை வெவ்வேறு உயரங்களுக்கு எழும்புகின்றன. தரையிலிருந்து மீளும் போது இத்தகைய திசைவேக வேறுபாட்டைத் தோற்றுவிக்கும் பண்பினைப் பொருளின் மீள் தன்மை அல்லது மீட்சித்தன்மை (Elasticity) என்கிறோம். இப்போது இத்தகைய மீட்சியுறு பொருட்களின் மோதல்களைப்பற்றிக் காண்போம்.

நேரடி மோதலும், சாய்வு மோதலும் (Direct and oblique impacts): இரு பொருட்களிடையே மோதல் நிகழும் போது அவை இயங்கும் திசைகளும், அவை ஒன்றையொன்று தொடும் புள்ளியில் அப்பொருட்களுக்கு வரையப்படும் பொது இயல்புக் கோட்டின் (Common normal) திசைகளும் ஒரே கோட்டில் இருந்தால், அத்தகைய மோதல் நேரடி மோதல் (direct impact) எனப்படும். அவ்வாறின்றி இயல்புக் கோடுகளின் திசைகளும் வெவ்வேறு கோடுகளில் இருந்தால் அத்தகைய மோதலைச் சாய்வு மோதல் (oblique

impact) என்கிறோம். பொது இயல்புக் கோட்டினை மோதற் கோடு (line of impact) என்கிறோம். இரு கோணங்களின் மோதற்கோடு அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோடாக இருக்கும்.

நியூட்டனின் சோதனை விதி (Newton's experimental law) : சோதனைகள் மூலமாக, இரு பொருட்களின் நேரடி மோதலின் போது மோதலுக்குப் பின்னர் அவைகளின் சார்புத் திசை வேகம் (Relative velocity) மோதலுக்கு முன்னர் அவைகளின் சார்புத் திசைவேகத்துடன் ஒரு நிலையான விகிதத்தில் (constant ratio) இருப்பதுடன், அதற்கு எதிர்த்திசையிலுமிருக்கும் என நியூட்டன் கண்டறிந்தார்.

சாய்வு மோதலின் போது, பொது இயல்புக் கோட்டின் திசையில் மோதலுக்குப் பின்னர் சார்புத் திசைவேகத்தின் கூறு (Component), மோதலுக்கு முன்னர் இருந்த சார்புத் திசைவேகத்தின் கூறுடன் நிலையான விகித்தைக் கொண்டிருப்பதுடன், எதிர்த் திசையிலுமிருக்கும்.

இந்த நிலையான விகிதம் பொருட்களின் மூலப் பொருளை மட்டுமே பொறுத்தது. அவைகளின் நிறைகளைப் பொறுத்ததல்ல. இவ் விகிதம் நிலை மீட்பு எண் (coefficient of restitution) எனப் படும். இதனை e எனக் குறிப்போம்.

பொது இயல்புக் கோட்டில், இரு பொருட்களின் திசைவேகக் கூறுகள் மோதலுக்கு முன் முறையே u_1, u_2 எனவும், மோதலுக்குப் பின் முறையே v_1, v_2 எனவும் இருந்தால்

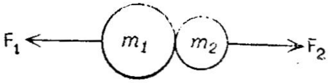
$$v_1 - v_2 = e(u_1 - u_2) \qquad (42.1)$$

நிலை மீட்பு எண் சுழியாக உள்ள பொருட்களை மீட்சியுறுப் பொருட்கள் (inclastic bodies) என்றும், நிலை மீட்பு எண் ஒன்றுக்குச் சமமாக உள்ள பொருட்களை நிறை மீட்சியுறு பொருட்கள் (perfectly clastic bodies) என்றும் கூறுவோம். நடைமுறையில் இத்தகைய பொருட்கள் இல்லை. எல்லாப் பொருட்களுக்கும் பொதுவாக e -யின் மதிப்பு சுழிக்கும் 1-க்கும் இடையில் இருக்கும்.

43 மோதலின் போது உந்தம் மாறுத்தன்மை (Conservation of momentum during impact)

இரு உராய்வற்ற பொருட்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று மோதும்போது அவற்றின் பொது இயல்புக் கோட்டில் மட்டுமே விசைகள் செயல் படுகின்றன. தொடு கோட்டில் விசைகள் செயல்படுவதில்லையாதலால் பொது இயல்புக் கோட்டுக்கு நேர்குத்தான திசையில் திசைவேக மாற்றம் நிகழ்வதில்லை. எனவே, மோதலின் விளைவாகப் பொது இயல்புக் கோட்டிற்கு நேர்குத்தான திசையில் திசைவேகக் கூறுகளில் (Components of velocity) மாறுதல் உண்டாவதில்லை.

முறையே m_1, m_2 என்ற நிறைகள் கொண்ட இரு பொருட்களின் மோதலில் ஒன்றின் மீது மற்றொன்று மிகப் பெரிய விசையை மிகக் குறுகிய காலத்துக்குள் செலுத்துகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் (Instant) F_1 என்பது m_2, m_1-ன் மீது செலுத்தும் விசை



படம் 38

யாகவும், அதே தருணத்தில் F_2 என்பது m_1, m_2-வின் மீது செலுத்தும் விசையாகவும் இருந்தால், நியூட்டனின் மூன்றும் இயக்க விதிப் படி,

$$F_1 = -F_2 \tag{43.1}$$

இம் மோதலின் விளைவாக $\triangle t$ என்ற காலத்துக்குள் முதற் பொருளில் தோன்றும் உந்த மாறுபாடு சமன்பாடு (41.2) லிருந்து

$$\triangle P_1 = \int_0^{\triangle t} F_1 \, dt \tag{43.2}$$

அதே போல இரண்டாவது பொருளின் உந்த மாறுபாடு

$$\triangle P_2 = \int_0^{\triangle t} F_2 \, dt \tag{43.3}$$

வேறு எந்த விசையும் செயல்படாததால் $\triangle P_1$, $\triangle P_2$ என்பன பொருட்களின் மொத்த (total) உந்த மாறுபாடுகளைக் குறிப்பன. ஒவ்வொரு கணத்திலும் $F_1 = -F_2$ ஆதலால் சமன்பாடு (43.2), (43.3) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\triangle P_1 = -\triangle P_2 \tag{43.4}$$

இரு பொருட்களும் ஒரு தொகுதியமைப்பாக (single system) இருந்தால், அத் தொகுதியின் மொத்த உந்தம் $P = P_1 + P_2$ ஆகும். அத்தகைய தொகுதியின் உந்த மாறுபாடு $(\triangle P_1 + \triangle P_2)$ ஆகும். ($\triangle t$ என்ற காலத்தில்). ஆனால், சமன்பாடு (43.4)-ன்படி

$$\triangle P_1 + \triangle P_2 = O \tag{43.5}$$

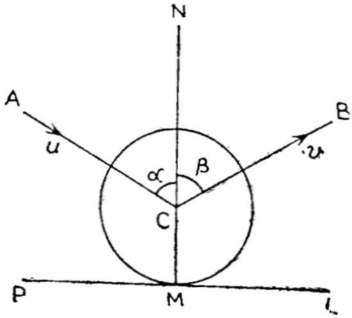
எனவே, வேறு விசைகள் செயல்படாதபோது ஒரு தொகுதியின் மொத்த உந்தம் P மாறுவதில்லை. இதுவே உந்த அழிவின்மை விதியாகும்.

குறிப்பு F_1, F_2 என்பன Δt என்ற கால அளவில் நிலையானவை களாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

44. நிலையான தளத்தின் மீது மோதல் (Impact on a fixed plane)

m நிறையும் e நிலை மீட்பு எண் (Coefficient of restitution)னும் கொண்ட ஒரு உராய்வற்ற, வழவழப்பான கோளம் ஒரு நிலையான தளத்தின் மீது மோதுவதாகக் கொள்வோம்.

PL என்பது நிலையான தளத்தையும், **M**, கோளம் தளத்தின் மீது மோதுகின்ற புள்ளியையும், **MN** என்பது **M**-ல் தளத்துக்கு



படம் 39

வரையப்பட்ட நேர்க்குத்துக் கோட்டையும் குறிக்கட்டும். MN, கோள மையம் C-யின் வழியே செல்லும்.

மோதலுக்கு முன்னர் AC என்பது C-யின் திசையையும், u திசை வேகத்தையும் குறிக்கட்டும். மோதலுக்குப் பின்னர் CB என்பது C-யின் திசையையும், v-திசைவேகத்தையும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$\angle ACN = \alpha$ எனவும் $\angle BCN = \beta$ எனவும் கொள்வோம். தளம் வழவழப்பானதால் (Smooth) தளத்திற்கிணையான விசைகள் இல்லை. எனவே, தளத்திற்கிணையான திசைவேகக் கூறு மாறுவதில்லை. எனவே

$$v \sin\beta = u \sin\alpha \tag{44.1}$$

நியூட்டன் சோதனை விதிப்படி, (சமன்பாடு 42.1)

$$v\cos\beta - 0 = e\,(u\cos\alpha - 0)$$

அதாவது, $$v\cos\beta = e\,u\cos\alpha \tag{44.2}$$

சமன்பாடுகள் (44.1), (44.2) ஆகியவற்றின் இருமடிகளைக் (squares) கூட்டினால்

$v^2 = u^2 (\sin^2 \alpha + e^2 \cos^2 \alpha)$ என்கிடைக்கும். எனவே

$$v = \sqrt{(\sin^2 \alpha + e^2 \cos^2 \alpha)} \qquad (44.3)$$

மேலும் (44.1), (44.2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\tan \beta = \frac{1}{e} \tan \alpha \qquad (44.4)$$

சமன்பாடுகள் (44.3), (44.4) ஆகியவை முறையே மோதலுக்குப் பின் கோளத்தின் திசைவேகத்தையும், திசையையும் தருகின்றன.

சிறப்பு நிகழ்வுகள் (Special cases) :

(1) நேரடி மோதலாக இருப்பின் ($\alpha = 0$; எனவே $\beta = 0$. மேலும் $v = eu$ ஆகும்.

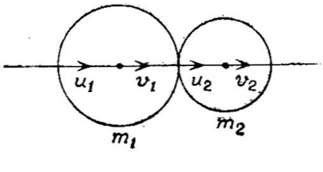
(2) நிலை மீட்பு எண் $e = 1$ ஆனல், $\alpha = \beta$; $v = u$ ஆகும். எனவே, நிறை மீட்சியுறு பொருள் தளத்தில் மோதும்போது படு கோணம், மீள் கோணத்துக்குச் சமமாவதோடு, திசைவேகத்தின் எண் மதிப்பு மாறுவதில்லை.

(3) நிலை மீட்பு எண் $e = 0$ ஆனல், $\beta = 90°$; $v = u \sin \alpha$ ஆகும். எனவே மீட்சியுரு வகையில் கோளம் தளத்தில் மோதும் போது பொருள் தளத்தின் மீதே அதற்கிணையான திசைவேகக் கூறுடன் இயங்கும்.

45. இரு கோளங்களிடையே மோதல் (Impact between two spheres)

1) நேரடி மோதல் (Direct Impact): ஒரு வழவழப்பான m_1 நிறையுள்ள கோளம், u_1 என்ற திசைவேகத்தில் சென்று, அதே திசையில் u_2 என்ற திசைவேகத்துடன் செல்லும் m_2 என்ற நிறையுள்ள மற்றொரு கோளத்தின் மீது நேரடியாக மோதுவதாகக் கொள்வோம்.

மோதலுக்குப் பின்னர் v_1, v_2 என்பன முறையே m_1, m_2 ஆகியவற்றின் திசைவேகங்களானல், நியூட்டன் சோதனை விதிப்படி,



படம் 40

$$v_1 - v_2 = - e (u_1 - u_2) \qquad (45.1)$$

வெளிப்புற விசையேதும் செயல்படாததால் உந்த அழிவின்மை விதிப்படி

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad (45.2)$$

சமன்பாடு (45,1)-ஐ m^2-ஆல் பெருக்கிச் சமன்பாடு (45.2) உடன் கூட்டினுல்,

$$(m_1 + m_2) v_1 = (m_1 - em_2) u_1 + m_2 (1+e) u_2 \qquad (45.3)$$

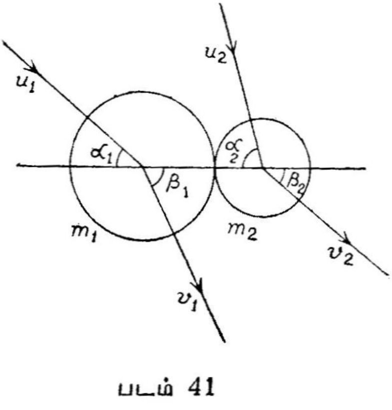
அதேபோல் (45 1)-ஐ m_1 ஆல் பெருக்கி (45.2)-லிருந்து கழித்தால்

$$(m_1 + m_2) v_2 = m_1 (1+e) u_1 + (m_2 - {}_1e) u_2 \qquad (45.4)$$

சமன்பாடுகள் (45.3), (45 4) ஆகியவற்றிலிருந்து v_1, v_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

சிறப்பு நிகழ்வு : $m_1 = m_2$ ஆகவும் $e = 1$, ஆகவும் இருந்தால் $v_1 = u_2$, $v_2 = u_1$ ஆகும். எனவே, மோதலுக்குப் பின்னர் இரு பொருட்களும் தங்கள் திசைவேகங்களைப் பரிமாற்றம் (exchange) செய்து கொள்கின்றன.

2. சாய்வு மோதல் (Oblique impact): m_1-நிறையுள்ளதும் u_1 என்ற திசைவேகத்துடன் செல்வதுமான ஒரு வழவழப்பான கோளம், m_2-நிறையுள்ள, u_2-என்ற திசைவேகத்துடன் செல்கின்ற மற்ருெரு வழவழப்பான கோளத்துடன் சாய்வாக மோதுவதாகக்



படம் 41

கொள்வோம். மோதலுக்கு முன் அவைகளின் திசைகள், மோதலின் போது அவைகளின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் α_1, α_2 என்ற கோணங்களை முறையே உண்டாக்கினுல், மோதலுக்குப்

பின் அவற்றின் திசைவேகங்களையும், அவை இயங்கும் திசைகளையும் பின் வருமாறு காணலாம். நிலை மீட்பு எண் e என்போம். மோதலுக்குப் பின்னர் அவை முறையே v_1, v_2 என்ற திசை வேகங்களுடன், மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் முறையே β_1, β_2 என்ற கோணங்களில் செல்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

வழவழப்பான (Smooth) கோளங்களாதலால், மையங்களை இணைக்கும் கோட்டிற்கு நேர்குத்தான கோட்டில் அவைகளின் திசைவேகக் கூறுகள் மாறுவதில்லை. எனவே,

$$v_1 \sin \beta_1 = u_1 \sin \alpha_1 \qquad (45.5)$$

$$v_2 \sin \beta_2 = u_2 \sin \alpha_2 \qquad (45.6)$$

மோதற் கோட்டில் (line of Impact), மோதலுக்கு முன்னர் சார்புத் திசைவேகம் $(u_1\cos\alpha_1 - u_2\cos\alpha_2)$ ஆகவும், மோதலுக்குப் பின்னர் சார்புத் திசைவேகம் $(v_1\cos\beta_1 - v_2\cos\beta_2)$ ஆதலால் நியூட்டன் சோதனை விதிப்படி, (சமன்பாடு 42 1)

$$v_1 \cos \beta_1 - v_2 \cos \beta_2 = -e\,(u_1\cos \alpha_1 - u_2\cos \alpha_2) \qquad (45\ 7)$$

மேலும் மோதற் கோட்டில் மட்டுமே திசைவேகக் கூறுகள் மாறுபாடடைவதால் உந்த அழிவின்மை விதிப்படி

$$m_1 v_1 \cos \beta_1 + m_2 v_2 \cos \beta_2 = m_1 u_1 \cos \alpha_1 + m_2 u_2 \cos \alpha_2 \quad (45{\cdot}8)$$

(45·5) முதல் (45 8) வரையுள்ள நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்து, $v_1, v_2, \beta_1, \beta_2$ ஆகிய நான்கின் மதிப்புக்களையும் பெறலாம்.

சமன்பாடு (45·7)-ஐ m_2-ஆல் பெருக்கிச் சமன்பாடு (45·8) உடன் கூட்டினால்

$(m_1 + m_2)\, v_1 \cos \beta_1 = (m_1 - em_2)\, u_1 \cos \alpha_1 + m_2(1+e)u_2 \cos\alpha_2$ எனக் கிடைக்கும். எனவே

$$v_1 \cos \beta_1 = \frac{(m_1 - em_2)\, u_1 \cos \alpha_1 + m_2(1+e)\, u_2 \cos \alpha_2}{(m_1 + m_2)} \quad (45{\cdot}9)$$

சமன்பாடு (45·7)-ஐ m_1-ஆல் பெருக்கிச் சமன்பாடு (45·8)-இலிருந்து கழித்து $(m_1 + m_2)$-ஆல் வகுத்தால்,

$$v_2 \cos \beta_2 = \frac{m_1(1+e)\, u_1 \cos \alpha_1 + (m_2 - em_1)\, u_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} \quad (45{\cdot}10)$$

எனக் கிடைக்கும்.

சமன்பாடுகள் (45·5), (45.9) ஆகியவற்றிலிருந்து v_1, β_1 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும், சமன்பாடுகள் (45.6), (45·10) ஆகியவற்றிலிருந்து v_2, β_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் பெறலாம்.

சிறப்பு நிகழ்வுகள் :

(i) $u_2=0$ ஆனல், சமன்பாடு (45·6)-லிருந்து $\beta_2=0$ எனக் கிடைக்கும். எனவே m_2—மோதற் கோட்டின் வழியே செல்லும்.

(ii) $m_1=m_2$ ஆகவும், $e=1$ ஆகவும் இருந்தால்

$$v_1 \cos\beta_1 = u_2 \cos a_2$$
$$v_2 \cos\beta_2 = u_1 \cos a_1$$

எனவே, பொருட்கள் தங்கள் மோதற் கோட்டில் திசைவேகக் கூறுகளைப் பரிமாற்றம் செய்து கொள்கின்றன.

46. மோதலின்போது இயக்க ஆற்றல் இழப்பு (loss of Kinecti energy during impaet)

m_1, m_2 என்ற இரு கோளங்களின் நேரடி மோதலுக்கு முன் போலவே (சமன்பாடுகள் (45·1), (5·2) பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருந்துவன:

$$v_1-v_2 = -e(u_1-u_2)$$

அல்லது $$v_2-v_1 = e(u_1-u_2) \qquad (46·1)$$

$$m_1v_1+m_2v_2 = m_1u_1+m_2u_2 \qquad (46·2)$$

எனவே, $$(v_2-v_2)^2 = e^2(u_1-u_2)^2$$

இதனை m_1m_2-ஆல் பெருக்கினுல்

$$m_1m_2v_1^2+m_1m_2v_2 - 2m_1m_2v_1v_2$$
$$= e^2m_1m_2(u_1-u_2)^2 \qquad (46·3)$$

சமன்பாடு (46·2)-ன் இருமடி காண்போம்.

$$(m_1v_1+m_2v_2)^2 = (m_1u_1+m_2u_2)^2$$

$$\therefore \quad m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+2m_1m_2v_1v_2 = (m_1u_1+m_2u_2)^2$$

இதனைச் சமன்பாடு (46 3)-உடன் கூட்டினுல்,

$$(m_1m_2+m_1^2)v_1^2+(m_1m_2+m_2^2)v_2^2$$
$$= (m_1u_1+m_2u_2)^2+e^2m_1m_2(u_1-u_2)^2$$

$$\therefore \quad (m_1+m_2)(m_1v_1^2+m_2v_2^2)$$
$$= (m_1u_1+m_2u_2)^2 + m_1m_2(u_1-u_2)^2 - m_1m_2(u_1-u_2)^2$$
$$+ e^2m_1m_2(u_1-u_2)^2$$
$$= m_1^2u_1^2+m_2^2u_2^2+m_1m_2u_1^2+m_1m_1u_2^2$$
$$-(1-e^2)m_1m_2(u_1-u_2)^2.$$

எனவே

$$m_1 v_1^2 + m_2 u_2^2$$
$$= m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 - (1-e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m}(u_1 - u_2)^2$$

அல்லது

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 -$$
$$(1-e^2)\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(u_1 - u_2)^2$$

இச் சமன்பாட்டில் இடது பக்கம் உள்ள கோவை ($\tfrac{1}{2}m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2$) என்பது மோதலுக்குப் பின்னர் இரு பொருட்களின் மொத்த ஆற்றலைக் குறிக்கிறது. ($\tfrac{1}{2}m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 u_2^2$) என்பது மோதலுக்கு முன்னர் அவைகளின் மொத்த ஆற்றலாகும். எனவே, சமன்பாடு (46·4)-லிருந்து மோதலுக்குப் பின்னர் இயக்க ஆற்றல்

இழப்பு,

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1-e^2)(u_1 - u_2)^2 \text{ ஆகும்.} \qquad (46.5)$$

இதில் $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $(u_1 - u_2)^2$ என்பன நேர்க்குறி யுடையன

வாதலால் (positive), e-ன் மதிப்பு 1-ஐ விடக் குறைவாக உள்ள போது மோதலின்போது இயக்க ஆற்றல் குறைவு உண்டாகிறது. $e=1$ ஆனால், இயக்க ஆற்றல் இழப்பு இல்லை.

இதே முறையில் சாய்வு மோதலிலும் சமன்பாடுகள் (46·7), (45·8) ஆகியவற்றிலிருந்து இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1-e^2)(u_1 \cos\alpha_1 - u_2 \cos\alpha_2)^2 \qquad (46\cdot6)$$

எனக் காட்டலாம்.

47. ஹோடோகிராஃப் (Hodograph)

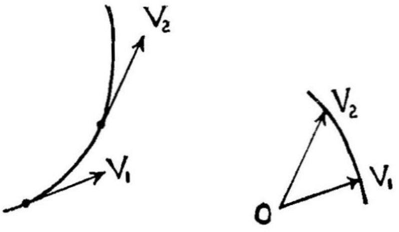
ஒரு துகள் அடையும் இடப்பெயர்ச்சி, காலத்தைப் பொறுத்து மாறும் வீதத்தைத் திசைவேகம் (velocity) என்கிறோம். அதே போன்று, காலத்தைப் பொறுத்துத் திசைவேகம் மாறும் வீதத்தை முடுக்கம் (acceleration) என்கிறோம். திசைவேகம், முடுக்கம் இரண்டும் வெக்டார் அளவுகள்.

இடப்பெயர்ச்சியுறும் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகத்தை O-என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து OV என்ற வெக்டாரால் குறிப்போம்.

தொடர்ந்து, பொருள் (புள்ளி) இடம் பெயரப் பெயர அதன் திசை வேகங்களை O-விலிருந்து வரையப்படும் வெக்டார்களால் குறிக்கலாம். இப்போது V என்ற புள்ளியின் பாதை ஒரு குறிப்பிட்ட வளைகோடாகும். இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கும் வளைகோட்டிலிருந்து எவ்வாறு திசைவேகத்தைப் பெற இயலுமோ, அதே போலத் திசை வேகத்தைக் குறிக்கும் வளைகோட்டிலிருந்து முடுக்கத்தைப் பெறலாம்.

V-யின் பாதையை ஹோடோகிராஃப் என்கிறோம். இப் பெயர் வழக்கத்தில் உள்ளதே தவிர அதன் பொருளுக்கும், அது குறிப்பிடுவதற்கும் தொடர்பு இல்லை. (ஹோடோகிராஃப் என்றால் பாதை வரைபடம் எனப் பொருள்)

OV_1, OV_2 என்பன முறையே $\triangle t$ என்ற குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியின் தொடக்கத்திலும், இறுதியிலும் ஒரு துகளின் திசை வேகங்களைக் குறித்தால், V_1V_2 என்ற வெக்டார், $\triangle t$-காலத்தில் திசைவேக மாற்றத்தை முழுமையாக, எண் மதிப்பிலும், திசையிலும் குறிக்கும்.



படம் 42

சம கால இடைவெளிகளில் திசைவேக மாற்றங்கள் சமமாக இருந்தால் எண் மதிப்பிலும், திசையிலும் முடுக்கம் சீரானதாகும்.

எனவே, t, $t+\triangle t$ ஆகிய நேரங்களில் OV_1, OV_2 என்பன திசை வேகங்களைக் குறித்தால் $\triangle t$ கால இடைவெளியில் (interval) சராசரி முடுக்கம் $\frac{v_1 v_2}{\triangle t}$ ஆகும். $\triangle t$ யின் மதிப்பைக் குறைத்துக் கொண்டே வந்து சுழியாகும் எல்லைக்குக் கொணர்ந்தால் $\triangle t \to 0$ எனும் நிலையில் $\underset{\triangle t=0}{Lt}\left(\frac{v_1 v_2}{\triangle t}\right)$ என்பது t என்ற நேரத்தில் முடுக்கத்தைத் தரும். அதன் திசை v_1 என்ற புள்ளியில் ஹோடோகிராஃபுக்குத் தொடு கோடாக (tangent) அமையும். முடுக்கம்

சீரானதாக இருந்தால், ஹோடோகிராஃப் நேர்கோட்டில் சீரான வேகத்துடன் செல்லும் புள்ளியாக இருக்கும்.

OV_1 என்ற வெக்டார் x, y தளத்திலிருந்தால்

திசைவேகம் $$v_1 = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad (47{\cdot}1)$$

முடுக்கம் $$a = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} \quad (47{\cdot}2)$$

எனவே $\frac{dv_1}{dt} = a$ ஆதலால்,

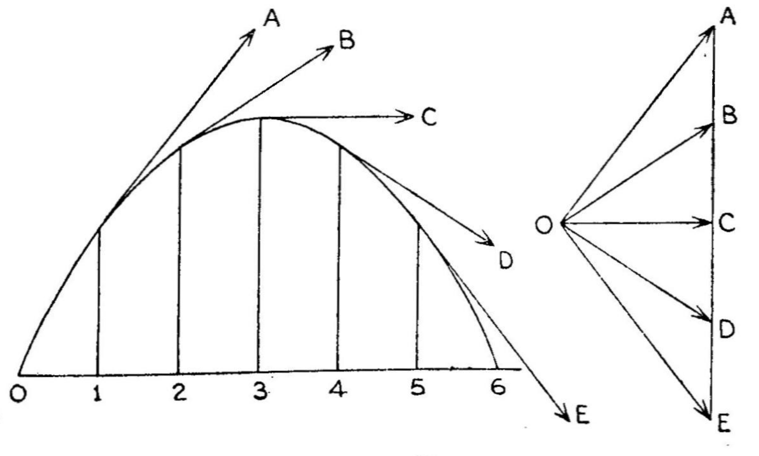
முடுக்கம் a சீரானதாக உள்ளபோது,

$v_1 = at+b$ ஆகும். இதனை மேலும் தொகு ஆக்கம் (Integration) செய்தால்

$$R = \tfrac{1}{2}at^2 + bt + c \quad (47{\cdot}3)$$

எனக் கிடைக்கும். இதில் b, c என்பன தொகை மாறிலி வெக்டார்கள் (constants of integration). சமன்பாடு (47·3) ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

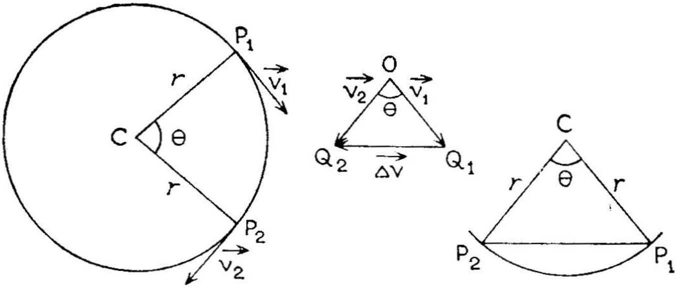
இதற்கு எடுத்துக் காட்டாக ஒரு எறிதுகளின் பாதையை நோக்குவோம். சமகால இடைவெளிகளில் திசைவேக வெக்டார்கள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. ABCDE என்பது எறிதுகளின் ஹோடோகிராஃப் ஆகும். திசைவேக வெக்டாரின் முனை நகரும் வேகம் g க்குச் சமமாதலால் நிலையானதாக இருக்கும்.



படம் 43

48. வட்ட இயக்கம் (circular motion)

முடுக்கம் என்பது திசைவேக மாறுதலைக் குறிக்குமென அறிவோம். தன்னிச்சையாக உயரத்திலிருந்து தானே விழும் பொருளின் திசைவேகம் எண்மதிப்பில் மட்டும் மாறுகிறது. ஆனால் திசையில் மாறுவதில்லை. சீரான வேகத்துடன் வட்டப் பாதையில் செல்லும் துகளின் திசைவேகம் எண்மதிப்பில் மாருவிட்டாலும் திசையில் மாற்றமுறுகிறது.



படம் 44

t- என்ற கணத்தில் P_1- என்பது துகளின் நிலையையும் $t+\triangle t$ என்ற கணத்தில் P_2- என்பது துகளின் நிலையையும் குறிக்கட்டும். P_1-ல் துகளின் திசைவேகம் $\vec{V}_1$ என்போம். P_2-ல் துகளின் திசைவேகம் $\vec{V}_2$ எனவும் கொள்வோம். $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ ஆகியவற்றின் திசைகள் முறையே P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளின் தொடுகோடுகளில் (tangents) இருக்கின்றன. வேகம் மாறுவதில்லையாதலால் $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ ஆகியவைகளின் எண்மதிப்புகள் மாறுவதில்லை. துகள் $\triangle t$ கால இடைவெளியில் கடந்த தொலைவு $P_1 P_2$ என்ற வளைகோடாகும்.

வேகம் v ஆனால்,

$$P_1P_2 = v \triangle t \tag{48·1}$$

இப்போது O என்ற புள்ளியிலிருந்து $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ என்ற வெக்டார்களை வரைவோம். திசைகளையும், எண்மதிப்புகளையும் மாற்றுமலிருந்தால் இவ்வாறு செய்வது வெக்டார் விதிகளுக்குட்பட்டதே. இப்போது $Q_1 Q_2$ என்ற வெக்டார் $\triangle \vec{V}$ என்ற திசைவேக மாற்றத்தைக் கொடுக்கும்.

$$\vec{V_2} - \vec{V_1} = \triangle\vec{V} \quad (48{\cdot}2)$$

இந்த $\triangle\vec{V}$ என்ற வெக்டாரின் திசை வட்ட மையத்தை நோக்கி யிருக்கக் காணலாம்.

$\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ ஆகியவற்றின் திசைகள் முறையே CP_1, CP_2 ஆகிய ஆரக்கோடுகளுக்கு நேர்குத்தானவை. ஆதலால், CP_1, CP_2 ஆகியவற்றின் இடையிலுள்ள கோணம், $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ ஆகியவற்றின் இடையிலுள்ள கோணமும் சமம்.

மேலும், $CP_1 = CP_2$

அதேபோல் $OQ_1 = OQ_2$ ($\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புகள் சமமாதலால்).

எனவே, $\triangle CP_1P_2$, $\triangle OQ_1Q_2$ ஆகியவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (Similar triangles). $\triangle\vec{V}$-யின் எண்மதிப்பு $\triangle v$ ஆனல்,

$$\frac{\triangle v}{v} = \frac{P_1P_2}{r} \quad (48{\cdot}3)$$

இதில் r என்பது வட்ட ஆரம் (radius).

$\triangle t$ சிறியதாக உள்ளபோது வளைகோடு P_1P_2, நேர்க்கோடு P_1P_2 -வுக்குச் சமமாகும். எனவே, சமன்பாடுகள் (48·1), (48·3) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{\triangle v}{v} = \frac{v\,\triangle t}{r}$$

அல்லது, $$\frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{v^2}{r} \quad (48{\cdot}4)$$

$\triangle t$-யின் மதிப்பை மிக மிகச் சிறியதாக்கினல்,

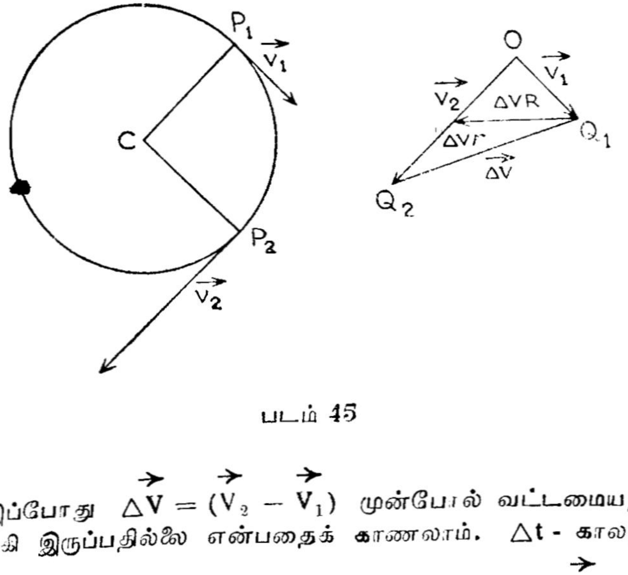
$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{r} \quad (48{\cdot}5)$$

$\frac{dv}{dt}$ என்பது முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பாகும். இம் முடுக்கம் வட்ட மையத்தை நோக்கி இருக்கும். இதனை ஆர முடுக்கம் (radia)

acceleration) அல்லது இயல்புக் கோட்டு முடுக்கம் (**normal acceleration**) என்கிறோம்.

தொடுகோட்டு முடுக்கம் (tangential acceleration):

இப்போது வட்டத்தில் இயங்கும் பொருளின் வேகமும் மாறுவதாகக் கொள்வோம். P_1- லிருந்து P_2-வுக்குச் செல்லுகையில் துகளின் திசைவேகம் $\vec{V}_1$-இலிருந்து $\vec{V}_2$-ஆக மாறுகிறது. $\vec{V}_2$-வின் எண்மதிப்பு, திசை இரண்டும் V_1-லிருந்து மாறுபட்டவை. முன் போலவே O- என்ற புள்ளியிலிருந்து OQ_1, OQ_2 என்ற முறையே $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் வெக்டார்களை வரைவோம்.



படம் 45

இப்போது $\Delta\vec{V} = (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$ முன்போல் வட்டமையத்தை நோக்கி இருப்பதில்லை என்பதைக் காணலாம். Δt - காலத்தில் P_1 -லிருந்து P_2 -வுக்கு வரும் துகளின் சராசரி முடுக்கம் $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ ஆகும்.

$\Delta\vec{V}$ என்பதை மையத்தை நோக்கிய ΔV_R என்ற ஆரக் கூறுகவும் (radial component), $\Delta\vec{V}_T$ என்ற தொடு கோட்டுக் கூறுகவும் (tangential component) பிரிக்கலாம். படத்திலிருந்து

$$\Delta\vec{V} = \Delta\vec{V}_R + \Delta\vec{V}_T \qquad (48\cdot6)$$

ஆரக்கூறு துகளின் திசைவேகத்தில் தோன்றும் திசை மாற்றத்தால் உண்டாவதென முன்னர் கண்டோம். தொடு கோட்டுக் கூறு துகளின் திசை வேகத்தின் எண்மதிப்பில் உண்டாகும் மாற்றத்தைத் தருவதாகும். $\triangle$t-யை மிகமிகச் சிறியதாக ஆக்கினுல், சமன்பாடு (48·6)-லிருந்து

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}_R}{dt} + \frac{d\vec{V}_T}{dt} \text{ அல்லது}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_R + \vec{a}_T \qquad (48{\cdot}7)$$

இதில் $\vec{a}$ என்பது துகளின் முடுக்கத்தையும் $\vec{a}_R = \frac{d\vec{V}_R}{dt}$ என்பது ஆர முடுக்கம் அல்லது இயல்புக் கோட்டு முடுக்கத்தையும்,

$\vec{a}_R = \frac{d\vec{V}_T}{dt}$ என்பது தொடுகோட்டு முடுக்கத்தையும் (tangential acceleration) குறிக்கின்றன. ஆர முடுக்கம் a_R-ன் மதிப்பு $a_R = \frac{v^2}{r}$ என அறிவோம்.

$$\text{எனவே,} \quad a = \sqrt{a_R^2 + a_1^2} \qquad (48{\cdot}8)$$

$$\text{இதில்} \quad a_R = \frac{dv}{dt} \quad a_R = \frac{v^2}{r} \qquad (48{\cdot}9)$$

a - என்பது துகளின் முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பாகும். v-ன் மதிப்பு மாறுவதால் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் a_R-ன் மதிப்பு மாறும். v-யின் மாற்றம் சீரானதாக இருந்தால் $a_T = \frac{dv}{dt}$ = மாறிலியாகும். இல்லாவிடில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் a_T மாறும்.

இந்த இயக்கம் வட்டப்பாதையில் இல்லாமல் வேறு வளைகோட்டில் நிகழ்ந்தாலும் மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் பொருந்துவனவாம் ஆனுல், ஆரம் r என்பதற்கு பதிலாக, வளைவு ஆரம் ρ-வைப் பிரதியிட்டுக் கொள்ள வேண்டும். அப்போது a_T என்பது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடுகோட்டு முடுக்கத்தின் மதிப்பையும், a_ρ என்பது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இயல்புக் கோட்டு முடுக்கத்தையும் கொடுக்கின்றன.

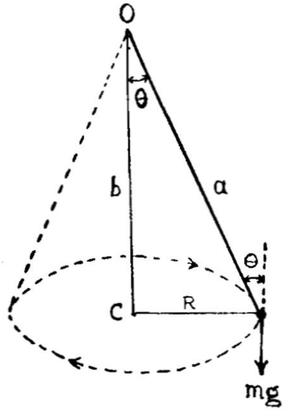
[குறிப்பு : கோணத்தின் திசை வேகம் (angular velocity ஆனுல், $v = \omega r$ ஆகும். எனவே, இயல்புக் கோட்டு முடுக்கத்தை $\omega^2 r$ எனவும் எழுதலாம்.

எனவே, வளைகோட்டில் செல்லும் எந்தப் பொருளும் இயல்புக் கோட்டு முடுக்கத்துடன் இயங்க வேண்டும். இதனால் இயல்புக் கோட்டின் திசையில் விசை செயல்படவேண்டும். இவ்விசையை மையநோக்கு விசை (Centripetal force) என்கிறோம். இவ் விசைக் குப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள் கூறலாம். புவி, தனது ஈர்ப்பு விசையால் நிலவை வட்டப் பாதையில் இயங்கச் செய்கிறது. கவணில் கல்லை வைத்துச் சுற்றும் போது கை கயிற்றின் வழியே செலுத்தும் விசை கல்லை வட்டப்பாதையில் சுழலச் செய்கிறது. ஊசலாடும் ஊசற்குண்டின் மீது நூல் செலுத்தும் விசை ஊசற் குண்டை வட்டப் பாதையில் செல்லச் செய்கிறது. இத்தகைய மைய நோக்குவிசை இல்லாவிடில் பொருள் வட்டப் பாதையில் இயங்காது. எந்தப் புள்ளியில் மையநோக்கு விசை நின்று விடுகிறதோ அந்தப் புள்ளியிலிருந்து தொடுகோட்டின் திசையில் பொருள் செல்லும். கவணில் இருந்து விடுபட்ட கல் இவ்வாறு செல்வதை அறிவோம். அதேபோல் கத்தியைச் சாணைக்கல்லில் வைத்து உராயும்போது தீப்பொறிகள் தொடுகோட்டில் செல்வதையும் அறிவோம்.

49. கூம்பு ஊசல் (Conical pendulum)

a- நீளமுள்ள ஒரு மெல்லிய நூலால் ஒரு நிலையான புள்ளி O- வுடன் இணைக்கப்பட்ட m- நிறையுள்ள ஒரு துகள் புவியீர்ப்பால் ஊசலாடுவதாகக் கொள்வோம். இத்துகளின் இயக்கம் a-யை ஆரமாகக் கொண்ட கோளப் பரப்பிலேயேதான் இருக்க இயலுமாதலால் இத்தகைய ஊசலைக் கோள ஊசல் (spherical pendulum) என்கிறோம்.

அதே துகள் கிடைத்தளத்திற்கு இணையான R - ஆரமுள்ள, C-யை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் மட்டும் சுற்றுவதாகக்



படம் 39

கொண்டால், அந்நிலையில் நூல் ஒரு நேர்குத்து வட்டக் கூம்பின் (right circular cone) சாய் பரப்பை வரையும். இத்தகைய ஊசலைக் கூம்பு ஊசல் (Conical pendulum) என்கிறோம்.

வெளிப்புற விசைகள் இல்லையாதலால், படத்திலிருந்து பின் வரும் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்:

$$T \cos \theta = mg \qquad (49\cdot1)$$

$$T \sin \theta = \frac{m v^2}{R} \qquad (49\cdot2)$$

இவற்றில் T என்பது நூலின் இழுவிசையையும் θ என்பது அரைச் செங்குத்துக் கோணத்தையும், (semi-vertical angle), v என்பது துகளின் திசை வேகத்தையும் குறிக்கின்றன. $OC = b$ ஆனல், $\cos \theta = \frac{b}{a}$; எனவே, சமன்பாடு $(49\cdot1)$-லிருந்து

$$T = \frac{mga}{b} \qquad (49\cdot3)$$

$\sin \theta = \frac{R}{a}$ ஆதலால், சமன்பாடு $(49\cdot2)$,$(49\cdot3)$ ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$\frac{mga}{b} \cdot \frac{R}{a} = \frac{mv^2}{R}$$

அல்லது, $$v^2 = \frac{gR^2}{b} \qquad (49.4)$$

n-என்பது அதிர்வெண்ணானல், $v = 2\pi Rn$.

எனவே, $$4\pi R^2 n^2 = \frac{gR^2}{b}$$

அல்லது, $$n^2 = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{g}{b} \qquad (49.5)$$

அலைவு நேரம் T ஆனல், $n = \frac{1}{T}$ ஆதலால்,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 b}{g}$$

எனவே, $$T = 2\pi \sqrt{\frac{b}{g}}$$

அல்லது, $$T = 2\pi \sqrt{\frac{a \cos \theta}{g}} \qquad (49.6)$$

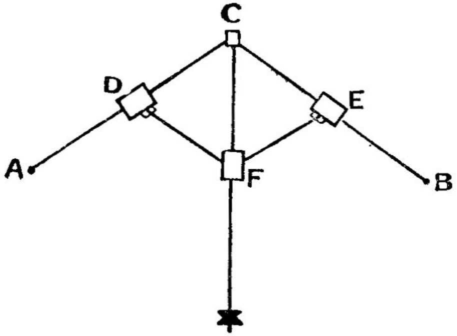
இதுவே கூம்பு ஊசலின் அலைவு நேரமாகும்.

கட்டுப் பாட்டமைப்புகள் (Governors) : சமன்பாடு (49.5)-லிருந்து, கூம்பு ஊசலில் நிலையான புள்ளிக்குக் கீழே, சுழல் வட்ட மையத்தின் தொலைவு

$$b = \frac{g}{4\pi^2 n^2} \qquad (49.7)$$

எனக்கிடைக்கும். எனவே, அதிர்வெண் (frequency) அதாவது, ஒரு செகண்டில் சுற்றும் சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை (n) அதிகரித்தால் b-யின் மதிப்புக் குறையும். அதாவது, சுற்றுகின்ற பொருள் நிலைப் புள்ளியின் வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தை நோக்கி மேலே செல்லும். இத் தன்மையைப் பயன்படுத்தி, நீராவி எஞ்சினில் வேகக் கட்டுப்பாட்டமைப்புகள் செயல்படுகின்றன.

FC -என்ற சுழல் முனை (Spindle) எந்திரத்தால் சுழற்றப்படுகிறது. C -யில் CA, CB என்ற இரு மெல்லிய சட்டங்கள் கீல்



படம் 47

இணைப்பில் இணைக்கப்பட்டு, அவற்றின் மறு முனைகள் முறையே A, B என்ற எடைகளைத் தாங்குகின்றன.

CA- யும், CB -யும் F -என்ற நழுவு வளையத்துடன் (slip rings) இணைக்கப்பட்டுள்ளன. E -உடன் ஒரு நெம்புக் கோல் தொகுதி (lever system) இணைக்கப்பட்டு, நீராவியை உட்புக விடவோ, அடைக்கவோ பயன்படுத்தப்படும்.

முனையின் சுழல் வேகம் உயரும் போது A, B ஆகிய எடைகள் உயர்வதால், F மேலெழும்பி நீராவியை அடைத்து விடும். நீராவி செல்லாததால் சுழல் வேகம் குறையத் தொடங்கும். அப்போது F கீழிறங்கு மாதலால் மீண்டும் நீராவி உட்புக வேகம் அதிகரிக்கும். இவ்வாறு நீராவி கட்டுப் படுத்தப்பட்டுத்தேவையான அளவு மட்டுமே உட்செல்ல அனுமதிப்பதற்கு இவ்வமைப்புப் பயன்படுகிறது

50. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்கக் கணக்கு (1) 1 கிலோ கிராம் நிறையுள்ளதும், 5 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருப்பதுமான ஒரு பொருள் 2 கிலோ கிராம் நிறை கொண்ட 2 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் செல்கின்ற மற்றொரு பொருளின் மீது அதே திசையில் சென்று நேரடியாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பின்னர் இரு பொருட்களும் ஒன்றாக இணைந்து ஒரே வேகத்துடன் செல்லுகின்றன. அவ் வேகத்தைக் கணக்கிடுக. இயக்க ஆற்றல் குறைவையும் கணக்கிடுக.

இரு பொருட்களின் தொடக்க உந்தங்களின் கூட்டுத் தொகை

$= 1 \times 5 + 2 \times 2$

$= 9$ கிலோகிராம்-மீட்டர்.

இணைந்தபின் பொருட்களின் திசைவேகம் v ஆனால், பொருட்களின் உந்தம்

$= (1+2)\,v.$

$= 3v$

எனவே, $3v = 9$

அல்லது $v = 3$ மீட்டர் / செகண்டு தொடக்கத்தில் இரு பொருட்களின் இயக்க ஆற்றல்களின் கூட்டுத் தொகை

$= \frac{1}{2} \times 1 \times 5^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2^2$

$= 16.5$ ஜூல்,

மோதலுக்குப் பின்னர் ஆற்றல்

$= \frac{1}{2}\,(1+2)\,3^2$

$= 13.5$ ஜூல்

எனவே, இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$= 16.5 - 13.5$

$= 3$ ஜூல்.

இவ்வியக்க ஆற்றல் குறைவு வெப்பமாக மாற்றப்படும்.

விளக்கக் கணக்கு (2) : ஒரு நியூட்ரான் அதைப் போன்று 206 மடங்கு நிறையுள்ள காரீய அணுக்கருவுடன் நேரடியாக மோதுகிறது- அணுக்கரு தொடக்கத்தில் அமைதி நிலையிலிருந்தால் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு வீதத்தைக் கணக்கிடுக.

நியூட்ரானின் தொடக்கத் திசை வேகம் u_1 எனவும், மோதலுக்குப் பின் திசை வேகம் u_2 எனவும் நிறை m_1 எனவும் கொண்டால் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (u_1^2 - v_1^2)$$

இயக்க ஆற்றல் இழப்பு வீதம்

$$= \frac{\frac{1}{2} m_1 (u_1^2 - v_1^2)}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2}$$

$$= \frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1^2} = 1 - \left(\frac{v_1}{u^1}\right)^2$$

அணுக்கருவின் நிறை m_2 எனவும் அதன் இறுதி திசை வேகம் v_2 எனவும் கொண்டால், உந்த அழிவின்மை விதிப்படி

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (50.1)$$

மோதல் மீட்சியுள்ளதாக இருந்தால், ஆற்றல் அழிவின்மை விதிப்படி.

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

எனவே, $m_1 (u_1^2 - v_1^2) = m_2 v_2^2$

சமன்பாடு (50.1)-லிருந்து

$$m_1 (u_1 - v_1) = m_2 v_2$$

எனவே, $\dfrac{u_1^2 - v_1^2}{u_1 - v_1} = \dfrac{v_2^2}{v_2}$

அல்லது, $v_2 = u_1 + v_1$

எனவே சமன்பாடு (50.1)-ல்

$$m_1 (u_1 - v_1) = m_2 (u_1 + v_1)$$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{u_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

எனவே ஆற்றல் இழப்பு வீதம்

$$= 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{205}{207}\right)^2$$

$$= 0.02$$

$$= 2\%$$

விளக்கக் கணக்கு (3) : தொடக்கத்தில் அமைதி நிலையிலுள்ள ஒரு வாயுமூலக்கூறின் மீது, 300 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் செல்லும் அதே நிலையுள்ள மற்றொரு மூலக்கூறு மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பின் இரண்டாவது மூலக்கூறு முதலில் சென்ற

திசையிலிருந்து 30° விலகிச் செல்கிறது. மோதலுக்குப் பின்னர் இரு மூலக் கூறுகளின் திசைவேகங்களையும், முதல் மூலக்கூறு செல்லும் திசையையும் கணக்கிடுக.

மோதலுக்கு முன்னர் முதல் மூலக்கூறின் திசை வேகம் $u_1 = 0$; மோதலுக்கு பின்னர் அது v_1 என்ற வேகத்துடன் செல்வதாகக் கொள்வோம். இரண்டாவது மூலக்கூறின் தொடக்கத் திசைவேகம் u_2 எனவும், இறுதித் திசைவேகம் v_2 எனவும் கொள்வோம். மோதலுக்குப் பின்னர் அவைகள் செல்லும் திசைகள் θ_1, θ_2 என்ற கோணங்களில் இருக்கின்றன எனக் கொண்டால், நிறைகள் சம மானவை யாதலால்,

$$u_2 = v_1 \cos \theta_1 + v_2 \cos \theta_2 \qquad (50.2)$$

மேலும்,

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2 \qquad (50.3)$$

ஆற்றல் அழிவின்மை விதிப்படி,

$$\tfrac{1}{2} m u_2^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{2} m v_2^2$$

ஆதலால் $$u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad (50.4)$$

சமன்பாடு (50 0)-லிருந்து

$$v_1^2 \cos^2 \theta_1 = (u_2 - v_2 \cos \theta_2)^2$$

சமன்பாடு (50.3) -லிருந்து

$$v_1^2 \sin^2 \theta_1 = v_2^2 \sin^2 \theta_2$$

ஆதலால், $$v_1^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2 u_2 v_2 \cos \theta_2 \qquad (50.5)$$

எனவே சமன்பாடுகள் (50.4), (50.5) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$2 v_2^2 = 2 u_2 v_2 \cos \theta_2$$

அல்லது $$v_2 = u_2 \cos \theta_2$$

$u_2 = 300$ மீட்டர்/செகண்டு; $\theta_2 = 30°$ ஆதலால்,

$$v_2 = 300 \times \cos 30 = 260 \text{ மீட்டர்/செகண்டு}$$

எனவே, சமன்பாடு (50.4)-லிருந்து

$$v_1^2 = 300^2 - 260^2$$

எனவே, $v_1 = 150$ மீட்டர்/செகண்டு.

மேலும் $\sin \theta_1 = \dfrac{v_2}{v_1} \sin \theta_2$

ஆதலால், $\sin\theta_1 = \frac{260}{150}\sin 30°$

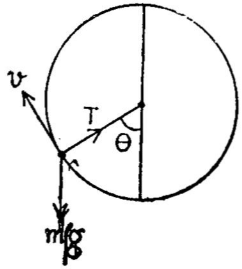
$$= 0.866$$

எனவே, $\theta_1 = 60°$

எனவே இரு மூலக் கூறுகளும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தான திசைகளில் செல்கின்றன.

விளக்கக் கணக்கு (4) : m நிறையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு நூலில் கட்டப்பட்டு ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் சுற்றப்படுகிறது. நிறை உச்சிப் புள்ளியில் உள்ள போது நூல் கயிற்றின் இழுவிசை T_1 ஆகவும், நிறை வட்டத்தின் அடிப்புள்ளியில் இருக்கும் போது இழுவிசை T_2 எனவும் கொண்டால், $T_2 - T_1 = 6\,mg$ எனக்காட்டு.

நூலின் திசை செங்குத்துத் திசையுடன் θ கோணத்தில் உள்ள போது, நூலின் இழுவிசை T எனவும், வட்டத்தின் ஆரம் r



படம் 48

எனவும், துகளின் வேகம் v எனவும் கொண்டால், மைய நோக்கு விசை

$$\frac{mv^2}{r} = T - mg\cos\theta.$$

வட்டத்தின் உச்சிப் புள்ளியில் $\theta = \pi$; எனவே வேகம் v_1 ஆக இருந்தால்,

$$\frac{mv_1^{\,2}}{r} = T_1 + mg \qquad (50{\cdot}6)$$

வட்டத்தின் அடிப்புள்ளியில் $\theta = 0$ ஆதலால், வேகம் v_2 ஆனல்,

$$\frac{mv_2^{\,2}}{r} = T_2 - mg. \qquad (50{\cdot}7)$$

வரம்பு நிலையில், உச்சிப் புள்ளியில் நிறை உள்ளபோது $T_1 = 0$ ஆக வேண்டும். எனவே,

$$\frac{v_1^2}{r} = g$$

அல்லது $$v_1 = \sqrt{gr}$$

v- யின் மதிப்பு $\sqrt{gr}$ -ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால், நிறை செங்குத்து வட்டத்தில் இயங்காது.

வட்ட உச்சியிலிருந்து அடிப்புள்ளிக்கு வருகையில் நிறையின் நிலையாற்றல் குறைவு $= mg \times 2r$.

இயக்க ஆற்றல் உயர்வு $= \frac{1}{2}m\,(v_2^2 - v_1^2)$

எனவே $\frac{1}{2}m\,(v_2^2 - v_1^2) = mg \times 2r$

அல்லது $v_2^2 - v_1^2 = 4gr.$

வரம்பு நிலையில் $v_1^2 = gr$ ஆதலால், $v_2^2 = 5gr$

அல்லது $v_2 = \sqrt{5gr}.$

எனவே அடிப்புள்ளியில் வேகம் $\sqrt{5gr}$ - ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் நிறை உச்சிப் புள்ளிவரை வட்டத்தில் செல்ல இயலாது. எனவே,

$v_2^2 - v_1^2 = 4gr$ என்பதைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடுகள் (50·6), (50·7) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$T_2 - T_1 - 2mg = \frac{m}{r}.\,4gr$$

$$T_2 - T_1 = 6mg$$

இயக்க ஆற்றல் உயர்வு எப்போதும் $mg \times 2r$-க்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமாதலால், T_1, T_2 ஆகியவற்றின் எல்லா மதிப்புக் களுக்கும்

$v_2^2 - v_1^2 = 4gr$ என்பது பொருந்துவதாகும்.]

பயிற்சிக் கணக்குகள் :

1. சம நிறைகள் கொண்ட இரு பொருட்களின் மீட்சியுடைய மோதுகை (elastic collision)-யின் போது, ஒரு பொருள் தொடக்கத்தில் அமைதி நிலையிலிருந்தால், மோதலுக்குப் பின்னர் இரு பொருட்களும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தாகச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

2. ஒரு நியூட்ரான் அமைதி நிலையிலுள்ள ஒரு ஹைட்ரஜன் அணுக்கருவுடன் நேரடியாக மோதுகிறது. நியூட்ரானின் நிறையும் அணுக்கருவின் நிறையும் சமமெனக் கொண்டு, அத்தகைய மோதலில் நியூட்ரானின் ஆற்றல் இழப்பு வீதத்தைக் கணக்கிடுக.

3. 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு கோளம் செங்குத்தாக 25 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் தரையில் மோதுகிறது. பின்னர் அது தரையிலிருந்து மீளும் வேகம் 10 மீட்டர்/செகண்டு ஆனால், (i) செயல்படும் கணத்தாக்கின் அளவைக் கணக்கிடுக. (ii) தரையுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ள காலம் 0·2 செகண்டானால் தரையின் மீது செலுத்தப்பட்ட சராசரி விசை என்ன?

4. 10 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு, 2 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள அலைவு ஊசலின்மீது (ballistic pendulum) மோதுகிறது. அலைவு ஊசலின் புவியீர்ப்பு மையம் 12 செ.மீ. செங்குத்துயரம் சென்றால், துப்பாக்கிக் குண்டு ஊசலினுள்ளேயே நின்று விடுகிறதெனக் கொண்டு, குண்டின் தொடக்க வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

5. வெவ்வேறு நிறைகள் கொண்ட A, B என்ற இரு பொருட்கள் மோதிக் கொள்கின்றன. தொடக்கத்தில் A அமைதி நிலையிலும் B, v என்ற வேகத்துடனும் இருந்தால் மோதலுக்குப் பின்னர் B-யின் வேகம் v/2 ஆக மாறுகிறது. B முதலில் சென்ற திசைக்கு நேர்க்குத்தான திசையில் சென்றால், A -செல்லும் திசையைக் கணக்கிடுக.

6. 0·05 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு 400 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்துடன் ஒரு அசையாத மரக் கட்டையின் மீது மோதுகிறது. அது கட்டையினுள் 0·1 மீட்டர் தொலைவு துளைத்திருந்தால், (i) கட்டையினுள் குண்டின் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக (ii) கட்டை செலுத்தும் தடுப்பு விசையைத் கணக்கிடுக. (iii) இத்தடுப்பு விசை செயல்பட்ட காலம் எவ்வளவு? (iv) மோதலின் தாக்கு (impulse) எவ்வளவு? தடுப்பு விசை சீரான தெனக்கொள்க.

7. ஒரு உராய்வற்ற தளத்தில் 0·12 மீட்டர்/செகண்டு வேகத்தில் செல்லும் 0·2 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருள், அமைதி நிலையிலுள்ள *m* கிலோகிராம் நிறையுள்ள மற்றொரு பொருளின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பின்னர் 200 கிராம் நிறை 0·04 மீட்டர்/செகண்டு வேகத்தில் அதே திசையில் சென்றால் (i) *m*-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக. (ii) மோதலுக்குப் பின்னர் அதன் திசைவேகத்தைக் கணக்கிடுக.

8. 0·002 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு குண்டு கிடைத் தளத்தில் 500 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்துடன் சென்று அமைதி நிலையிலுள்ள 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள மரக்கட்டையின் மீது மோதுகிறது- கட்டையைத் துளைத்துக் கொண்டு குண்டு மறு புறம் 100 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்துடன் வெளிவருகிறது. கட்டை தனது தொடக்க நிலையிலிருந்து 0·20 மீட்டர் தொலைவு நகர்ந்துவிடுகிறது. (i) தளத்துக்கும், கட்டைக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வு விசை என்ன? (ii) குண்டின் இயக்க ஆற்றல் குறைவு எவ்வளவு? (iii) குண்டு துளைத்து வெளிவரும்பொழுது கட்டை, யின் இயக்க ஆற்றல் எவ்வளவு?

9. 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு அலைவு ஊசலின் மீது 500 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் வரும் 0·002 கிலோகிராம் நிறையுள்ள குண்டு மோதுகிறது. அலைவு ஊசல் 1 மீட்டர் நீளமுள்ள நூலால் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. குண்டு ஊசலைத் துளைத்துக் கொண்டு 200 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்துடன் வெளிவந்தால், ஊசல் அடையும் செங்குத்து உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

10. புவியைச் சுற்றி நிலவு 38×10^4 கிலோமீட்டர் ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் சுற்றுவதாகக் கொள்வோம். ஒரு முறை நிலவு புவியைச் சுற்ற 27·3 நாட்கள் எடுத்துக் கொண்டால், புவியை நோக்கி நிலவின் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

11. 0·1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள சிறு பொருள் 1 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு நூலின் முனையில் இணைக்கப்பட்டு ஒரு செங்குத் தான வட்டத்தில் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. செங்குத்துக் கோட்டுடன் நூல் 30° கோணம் உண்டாக்கும்போது பொருளின் வேகம் 2 மீட்டர்/செகண்டு ஆனால், அந்நிலையில் (i) ஆர முடுக்கம், தொடு கோட்டு முடுக்கம் ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க. (ii) தொகுபயன் முடுக்கத்தின் திசையையும் எண் மதிப்பையும் கணக்கிடுக. (iii) நூலின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

12. 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருள் 1 மீட்டர் நீள முள்ள ஒரு கயிற்றின் முனையில் இணைக்கப்பட்டுக் கிடைத்தளத்தில் வட்டப் பாதையில் செல்லுமாறு சுற்றப்படுகிறது. கயிறு தாங்கக் கூடிய உச்ச இழுவிசை 500 நியூட்டன் என்றால், அவ்வட்டப் பாதையில் அப் பொருள் செல்லக் கூடிய பெரும வேகம் என்ன?

13. 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு சிறு பொருள் 0·5 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றின் முனையில் இணைக்கப்பட்டுச் செங்குத்தான ஒரு வட்டப் பாதையில் செல்லுமாறு சுற்றப்படுகிறது. வட்டத்தின் உச்சிப் புள்ளியில் அப் பொருளின் வேகம் 2·5 மீட்டர்/செகண்டு

ஆனால், அப் புள்ளியில் பொருள் உள்ளபோது கயிற்றின் இழுவிசை என்ன? வட்டத்தின் அடிப்புள்ளியில் உள்ளபோது கயிற்றின் இழுவிசை என்ன?

14. ஒரு துகள் ஒரு சீரான வட்ட இயக்கத்தில் உள்ளது. அதன் ஹோடோகிராஃப் எவ்வாறு அமையும்? ஏன்? அதிலிருந்து துகளின் முடுக்கம் $a = \frac{v^2}{r}$ எனக் காட்டு.

51. சீரியல்பான இயக்கம் (Simple Harmomic Motion)

ஒரு துகள் அதன் பாதையின் வழியே, அதன் முடுக்கம் எப்போதும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியை நோக்கியும், அம் முடுக்கத்தின் எண்மதிப்பு எப்போதும் அதன் இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர் விகிதத்திலும் இருக்குமாறு இயங்கினால், அவ்வியக்கத்தைச் சீரியல்பான இயக்கம் அல்லது சீரிய இயக்கம் (Simple Harmonic Motion) என்கிறோம்.

துகளின் பாதையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் இடப்பெயர்ச்சி x-ஆக இருந்தால், அப்போது முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$ ஆகும். இயக்கம் சீரியல்பானதாக அமைய வேண்டுமாயின்,

(i) $\frac{d^2x}{dt^2} \propto x$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

(ii) முடுக்கம் நிலையான அப்புள்ளியை நோக்கி இருக்க வேண்டுமாதலின், இடப்பெயர்ச்சிக்கு எதிர்த் திசையில் இருக்க வேண்டும்.

எனவே, சீரியல்பான இயக்கத்தைப் பின்வரும் சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம்.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \qquad (51.1)$$

இதில் μ- ஓர் மாறிலி. இச் சமன்பாட்டில் x- என்பது ஒரு கோட்டில் இடப்பெயர்ச்சியையோ அல்லது கோண இடப்பெயர்ச்சியோ (angular displacement) குறிக்கலாம். x- என்பது கோண இடப்பெயர்ச்சி யானால், $\frac{d^2x}{dt^2}$ என்பது கோண முடுக்கமாகும்.

(angular acceleration).

சமன்பாடு (51-1) -ல் $\mu = \omega^2$ எனக் கொண்டால்,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (51\cdot2)$$

இப்போது $x = A\cos(\omega t + \delta)$ எனக் கொள்வோம். அவ்வாருனல்,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \qquad (51\cdot3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \qquad (51\cdot4)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x.$$

எனவே, $x = A\cos(\omega t + \delta)$ என்பது சீரியல்பான இயக்கத்தின் சமன்பாடு (51·2)-க்கு ஒரு தீர்வு (solution) ஆகும். இதே போல $x = A\sin(\omega t + \delta)$ என்பதும் ஒரு தீர்வு எனக் காட்டலாம். இயக்கம் தொடங்குகின்ற நிலையைப் பொறுத்துக் குறிப்பிட்ட சீரியல்பான இயக்கத்துக்கு A, δ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பெற இயலும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரம் t-யில் இடப்பெயர்ச்சி $x = A\sin(\omega t + \delta)$ எனக் கொள்வோம். மேலும், $\frac{2\pi}{\omega}$ காலம் கடந்த பின்னர் இடப்பெயர்ச்சி

$$\begin{aligned} x_1 &= A \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \delta\right] \\ &= A \sin[2\pi + \omega t + \delta] \\ &= A \sin(\omega t + \delta) \\ &= x. \end{aligned}$$

எனவே, ஒவ்வொரு $\frac{2\pi}{\omega}$ நேர இடைவெளியிலும் துகள் ஒரே இடப்பெயர்ச்சியை அடைந்திருக்கும். மேலும், அந்தப் புள்ளியின் திசை வேகம் $\frac{dx}{dt}$ -யும் அதே நேர இடைவெளிக்குப் பின்னர் அதே திசைவேகத்தைக் கொண்டிருக்கும். எனவே, $\frac{2\pi}{\omega}$ என்பது

துகள் ஒரு முழு அலைவுக்கு எடுத்துக் கொள்ளும் காலத்தைக் குறிக்கிறது. இதனைத் துகளின் **அலைவு நேரம்** **(Period) T** என்கிறோம்.

$$\text{எனவே, } T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (51\cdot5)$$

$t=0$ ஆக உள்ளபோது $x=0$ ஆக இருந்தால், $x = A \sin \omega t$ என்ற சமன்பாடு தீர்வாக அமையும். அப்போது திசைவேகம்

$$\frac{dx}{dt} = A\,\omega \cos \omega t$$

$$= \omega A \sqrt{1-\sin^2 \omega t}$$

$$= \omega A \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \qquad (51\cdot6)$$

எனவே, இடப்பெயர்ச்சி x- சுழியாக (zero) உள்ளபோது திசைவேகம் $\frac{dx}{dt}$ பெரும மதிப்புடையதாக (maximum), ωA-க்குச் சமமாக இருக்கும். $x = A$ ஆக உள்ளபோது, திசைவேகம் $\frac{dx}{dt} = 0$ ஆகும். மேலும், $x = A$ ஆக உள்ளபோது முடுக்கம் பெரும மதிப்புடையதாக இருக்கும். ஆதலால், A என்பது பெரும இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கும். இதனை வீச்சு (Amplitude) என்கிறோம்.

52. ஒரே நேர்கோட்டில் இரு சீரியல்பான இயக்கங்களின் தொகுபயன் (Resultant of two S.H.M's along the same straight line)

ஒரே அலைவு நேரங் கொண்ட இரு சீரியல்பான இயக்கங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் நிகழ்வதாகக் கொள்வோம். அவைகளைப் பின்வரும் சமன்பாடுகள் குறிக்கட்டும்:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) \qquad (52\cdot1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \delta_2) \qquad (52\cdot2)$$

இவையிரண்டும் ஒரே நேர்கோட்டில் நிகழும் இயக்கங்களாதலால், இவற்றின் தொகுபயனால் உண்டாகும் இடப்பெயர்ச்சி

$$x = (x_1 + x_2) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_2)$$

$$= A_1 (\cos \omega t \cos \delta_1 - \sin \omega t \sin \delta_1)$$

$$+ A_2 (\cos \omega t \cos \delta_2 - \sin \omega t \sin \delta_2)$$

$$= (A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2) \cos \omega t$$
$$= (A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2) \sin \omega t$$

இதில் $(A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2)$, $(A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2)$ என்பன t -யைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை யாதலால், அவைகளை முறையே $A \cos \delta$, $A \sin \delta$ என எழுதுவோம். எனவே,

$$x = A \cos \delta \cos \omega t - A \sin \delta \sin \omega t$$

அதாவது, $x = A \cos (\omega t + \delta)$ (52·3)

இச் சமன்பாடு மற்ருெரு சீரியல்பான இயக்கத்தைக் குறிக்கிறது. இச் சீரியல்பான இயக்கத்தின் அலைவு நேரம், மற்ற இரண்டின் அலைவு நேரத்துக்குச் சமமாகும். அதன் வீச்சு

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\delta_1 - \delta_2)} \qquad (52·4)$$

மேலும் $\tan \delta = \dfrac{A_1 \cos \delta_1 + A_2 \cos \delta_2}{A_1 \sin \delta_1 + A_2 \sin \delta_2}$ (52·5)

இவ்வாறு அலைவு நேரங்கள் சமமாக இல்லாவிடில், தொகு பயன் சீரியல்பான இயக்கமாக இருப்பதில்லை, சிறிதளவே வேறுபட்ட அலைவு நேரங்கள் கொண்ட இரு சீரியல்பான இயக்கங் களின் தொகுபயனைத் தோராயமாக அறிய இயலும்.

53. ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்துக் கோடுகளில் அமைந்த இரு சீரியல்பான இயக்கங்களின் தொகுபயன் (Resultant of two S.H.M's along two mutually perpendicular directions):

$$x = a \cos \text{cot} \qquad (53·1)$$
$$y = b \cos (\text{cot} + \delta) \qquad (53·2)$$

என்பன ஒன்றுக்கொன்று நேர்குத்தான ஒரே அலைவு நேரங் கொண்ட இரு சீரியல்பான இயக்கங்களைக் குறிக்கட்டும்.

$$\frac{y}{b} = \cos (\omega t + \delta)$$

$$= \cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta$$

$$= \frac{x}{a} \cos \delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \delta$$

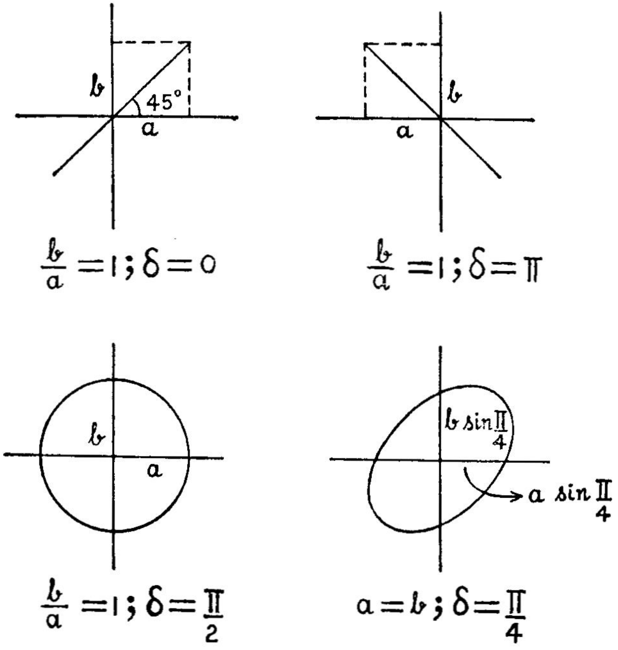
$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \delta = -\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \delta$$

இதன் இருமடி (square) கண்டால்,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta + \frac{x^2}{a^2}\cos^2\delta = \sin^2\delta - \frac{x^2}{a^2}\cos^2\delta$$

$$\therefore \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta \qquad (53\cdot3)$$

இது ஒரு நீள் வட்டத்திற்கான சமன்பாடு.



படம் 49

சிறப்பு நிகழ்வுகள் :

(i) $\delta = 0$ ஆனல், சமன்பாடு (53·3) பின்வருமாறு மாறும்.

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

அல்லது $$y = \frac{b}{a}x. \qquad (53\cdot4)$$

இது ஒரு நேர்ச்சரிவுடைய (positive slope) நேர்கோடாகும்.

(ii) $\delta = \pi$ ஆனல்,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

அல்லது $y = -\frac{b}{a}x$ ஆகும், (53·5)

இது ஓர் எதிர்ச் சரிவுடைய (negative slope) நேர்கோட்டினைக் குறிக்கும்.

(iii) $\delta = \frac{\pi}{2}$ ஆனல், $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (53·6)

இச் சமன்பாடு x, y ஆயக்கோடுகளின் திசைகளில் அச்சுக் கோடுகளைக் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும். இந் நிலையில் $a = b$ ஆனல்,

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (53\cdot7)$$

இது ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். (ஆரம் $= a$)

அலைவு நேரங்கள் சமமாக இல்லாவிடில் இவ்வாறு நேர், குத்தான இரு சீரியல்பான இயக்கங்களுக்குட் படுத்தப்பட்ட துகளின் இயக்கத்தை எளிதில் அறிவது இயலாது. இவ்வித இயக்கம் ஒரு குறிப்பிட்ட அலைவு நேரத்தைக் கொண்டிருப்பதும் அரிது.

இத்தகைய சீரியல்பான இயக்கங்களைப் பற்றிய அறிவு நமக்கு இரு வகைகளில் பயன்படும். முதலாவது, எந்திரவியலில், அதிர்வுகளை, சிறு அலைவுள்ள சீரியல்பான இயக்கங்களாகவோ அல்லது அத்தகைய இயக்கங்களின் தொகுப்பாகவோ பகுத்தறியலாம். இரண்டாவதாக, இத்தகைய சீரியல்பான இயக்கங்களுக்கான சமன்பாடுகளைப் பௌதிகத்தின் எல்லாப் பிரிவுகளிலும், (ஒலியியல், ஒளியியல், எந்திரவியல், மின்னியல், மற்றும் அணுவியலில் கூட) நாம் காணலாம்.

54. எடையற்ற சுருள் வில்லின் செங்குத்து அலைவுகள் (vertica oscillations of a light spiral spring)

A என்ற நிலையான புள்ளியிலிருந்து m நிறையுள்ள ஒரு பொருள் எடையற்ற ஒரு சுருள் வில்லின் மூலம் தொங்க விடப் பட்டுள்ளதெனக் கொள்வோம்.

எடை தொங்கவிடப்படாத போது சுருள் வில்லின் நீளம் $AB = l$ எனவும், மீட்சிக் குணகம் (modulus of elasticity) λ எனவும் கொள்வோம். m நிறை தொங்கும்போது வில் C என்ற

புள்ளிவரை நீண்டு சம நிலையிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். இந் நிலையில் வில்லின் இழுவிசையும் பொருளின் எடையும் சமமாகும். BC = d ஆனால்,

$$mg = \lambda \cdot \frac{d}{l} \qquad (54{\cdot}1)$$

படம் 50

C-யிலிருந்து நேரே கீழே பொருளை D-வரைஇழுத்து விட்டு விட்டால், பொருள் C-யைப் பொறுத்து மேலும் கீழும் அலைவுறத் தொடங்கும். இவ்வியக்கம் சீரியல்பானது (simple harmonic) எனப் பின்வருமாறு காட்டலாம்:

P-என்ற ஏதேனுமொரு புள்ளியில், C-யிலிருந்து இடப் பெயர்ச்சி x எனவும், அந்நிலையில் பொருள் உள்ளபோது இழுவிசை T எனவும் கொண்டால்,

$$T = \frac{\lambda}{l}(d+x) \qquad (54{\cdot}2)$$

இது பொருளை மேல் நோக்கி இழுக்கிறது. mg என்ற பொருளின் எடை கீழ்நோக்கிச் செயல்படுதலால், C-யை நோக்கிச் செயல்படும் விசை

$$T - mg = \frac{\lambda(d+x)}{l} - mg \text{ ஆகும்.}$$

சமன்பாடு (54.1)-லிருந்து $mg = \frac{\lambda}{l} d$ ஆதலால்,

$$T - mg = \frac{\lambda x}{l} \text{ ஆகும்.} \qquad (54{\cdot}3)$$

எனவே, C-யை நோக்கிச் செயல்படும் விசை x-க்கு நேர்விகிதத்தி லுள்ளது. இதனை நிறை × முடுக்கம் எனக் குறிப்பிட்டால்

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda x}{l}$$

அல்லது

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{ml}x \qquad (54{\cdot}4)$$

(இதில் — என்ற எதிர்க்குறி x மிகும்போது முடுக்கம் குறைகிற தென்பதைக் குறிக்கிறது.)

எனவே, இத்தகைய துகளின் இயக்கம் சீரியல்பானது (Simple Harmonic). இதன் அலைவு நேரம்

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\lambda}{ml}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{\lambda}} \qquad (54\cdot5)$$

இவ்வியக்கத்தின் வீச்சு, தொடக்க இடப்பெயர்ச்சியைப் பொறுத்து மாறுபடும்.

குறிப்புகள் :

(i) இவ்வியக்கம் C-யைப் பொறுத்த சீரியல்பான இயக்கமாகும். B-யை பொறுத்ததல்ல.

(ii) சுருள் வில்லைப் பொறுத்தவரை, B-யை விடப் பொருள் இயக்கத்தில் மேலே சென்ருலும் இச் சமன்பாடுகள் பொருந்துவன. ஆனல் ரப்பர் நூலால் கட்டப்பட்ட பொருளின் இயக்கத்தைக் கணக்கிடுகையில், வீச்சு B-க்கு மேலே சென்ருல் புவியீர்ப்பு விசை மட்டுமே பொருளின்மீது செயல்படும்; இழுவிசை செயல்படாது.

55. நிலைமத் திருப்புத் திறன் (Moment of Inertia)

m நிறையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்கோட்டிலிருந்து r- என்ற தொலைவில் உள்ளதாகக் கொள்வோம். அக் கோட்டைப் பொறுத்து அத் துகளின் நிலைமத் திருப்பு திறன் (Moment of Inertia) I ஆனல், அதனைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிருேம்:

$$I = mr^2 \qquad (55\cdot1)$$

இது போன்ற பல துகள்களைக் கொண்ட தொகுதி யொன்றின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் தனித்தனியே துகள்களின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம். எனவே, $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$ என்ற நிறைகள் கொண்ட துகள்கள் அக் கோட்டிலிருந்து முறையே $r_1, r_2 \ldots\ldots r_n$ என்ற தொலைவுகளில் இருந்தால் அத் தொகுதியின் திருப்புத் திறன்,

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots\ldots + m_nr_n^2$$

அல்லது $$I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2 \qquad (55\cdot2)$$

ஒரு தொகுதியை இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தால் அவ்விரு பகுதிகளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத்தொகை, அத்தொகுதியின் முழு நிலைமத் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும். எனவே,

$$I = I_1 + I_2 \qquad (55\cdot3)$$

என எழுதலாம்.

சீரான வடிவமில்லாத (irregular) பொருட்களைப் பொறுத்த வரை சுழற்சி ஆரம் k (radius of gyration) என்பதை வரையறுப்பது பயனுள்ளது. அத்தகைய பொருளொன்றின் நிறை **M** ஆகவும், ஒரு கோட்டைப் பொறுத்த அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் I ஆகவும் இருந்தால்,

$$I = Mk^2 \qquad (55\cdot4)$$

இதிலிருந்து k-யை அறிய இயலும்.

தொகுதியில் ஒரு துகள் மட்டுமே இருந்தால் சுழற்சி ஆரம் அத்துகளின் தொலைவைக் குறிக்குமென்பது தெளிவு.

தொடர்ச்சியான துகள் வரிசையைக் (continous matter) கொண்ட திண்பொருளின் நிலைமத்திருப்புத் திறனைச் சமன்பாடு (55·2)-ஐ மாற்றி

$$I = \int r^2\, dm \qquad (55\cdot5)$$

என எழுதலாம். இச் சமன்பாட்டில் dm என்பது அத் திண்பொருளின் மிகச்சிறு பகுதி (element) யொன்றின் நிறையையும், r- அதன் தொலைவையும் குறிக்கின்றன.

நிலைமத்திருப்புத் திறனின் பரிமாணம் $[ML^2]$ ஆகும். எனவே, அதன் அலகு கிலோ கிராம் / மீட்டர்^{2} ஆகும். சுழற்சி ஆரத்தின் இருமடியின் பரிமாணம் $\frac{I}{M}$ -ன் பரிமாணமாதலால், $\left[\frac{ML^2}{M}\right] = [L^2]$ ஆகும். எனவே, சுழற்சி ஆரம் [L] என்ற பரிமாணம் கொண்டது.

56. சில எளிய பொருட்களின் நிலைமத் திருப்பு திறன்கள் (Moments of Inertia of some simple objects)

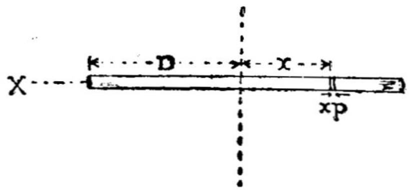
(i) வட்ட வளையம் (Circular ring) : m நிறையும் a-ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்ட வளையத்தின் எல்லாத்துகள்களும் வட்ட மையத்திலிருந்து ஒரே தொலைவில் உள்ளனவாதலால், வட்டத் தளத்துக்கு நேர்குத்தாக வட்டமையத்தின் வழியே செல்லும் கோட்டைப் பொறுத்து, அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறன் $I = ma^2$ ஆகும். (56.1)

(ii) சீரான கோல் : $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கோலின் (uniform rod) நிறை m என்போம். அதன் மையப்புள்ளியின் வழியே நீளத்துக்கு நேர்க்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து நிலைமத் திருப்புத் திறனைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

கோலினை x-அச்சில் உள்ளதாகவும், அதன் மையம் ஆயத் தொடக்கமாகவும் (Origin of Co-ordinates) கொள்வோம். x-தொலைவில் dx நீளமுள்ள கோலின் ஒரு சிறு பகுதியின் நிறை dm என்றால்

$$dm = \frac{m}{2a}\, dx.$$

எனவே நிலைமத்திருப்புத் திறன்



படம் 51

$$I = \left[\int r^2\, dm\right]$$

$$= \int_{-a}^{+a} \frac{m\,dx}{2a} \cdot x^2$$

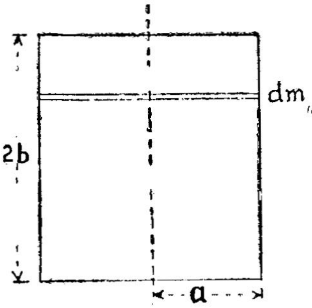
$$= \frac{m}{2a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a}$$

$$= \tfrac{1}{3}\, ma^2$$

எனவே $I = \frac{1}{3}\, ma^2$ (56.2)

(iii) செவ்வகத் தகடு (Rectangnlar Lamina) . m நிறையுள்ளதும் முறையே $2a$, $2b$ நீள அகலங்கள் கொண்டதுமான செவ்வகத் தகட்டிற்கு மையத்தின் வழியே $2b$ என்ற பக்கத்திற் கிணையான கோட்டைப் பொறுத்து தகட்டின் நிலைமத்திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுவோம். $2a$ என்ற பக்கத்திற்கு இணையான மிகச்சிறு பகுதிகளாகத் தகட்டினைப் பிரிப்போம். ஒரு சிறு பகுதியின் நிறை dm

ஆனால், அக் கோட்டைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறன் சமன்பாடு (56.2)-லிருந்து



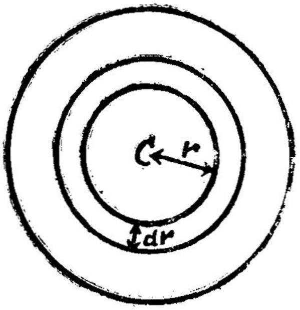
படம் 52

$$dI = \frac{1}{3} a^2\, dm \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, தகட்டின் நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$I = \frac{1}{3} a^2 m \text{ ஆகும்.} \qquad (56.3)$$

(iv) வட்டத் தட்டு (Cricular disc): m நிறையுள்ளதும் a-ஆரமுள்ளதுமான ஒரு வட்டத் தட்டுக்கு அதன் தளத்திற்கு நேர்க்குத்தாக மையப்புள்ளியின் வழியே செல்லும் கோட்டைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுவோம்.



படம் 53

வட்டத் தட்டினைப் பல சிறிய வட்ட வளையங்களாகப் பிரிக்கலாம். ஏதேனுமொரு வட்ட வளையத்தின் ஆரம் r ஆகவும், அகலம் dr ஆகவும் இருந்தால் அதன் நிறை

$$dm = \frac{m}{\pi a^2} \cdot 2\pi r\, dr$$

எனவே, வட்டத் தட்டின் நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$I = \int r^2 \, dm$$

$$= \int_0^a \frac{m}{\pi a^2} \cdot 2\pi r^3 \, dr$$

$$= \frac{2m}{a^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{1}{2} m a^2$$

எனவே, மையப்புள்ளியின் வழியே தளத்திற்கு நேர்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து வட்டத் தட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

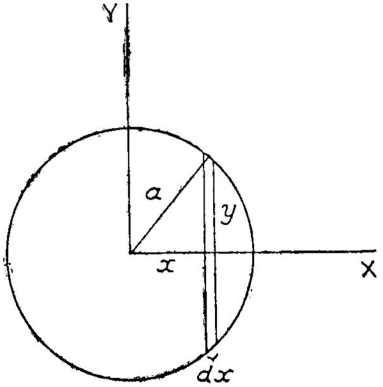
$$I = \frac{1}{2} m a^2 \qquad (56.4)$$

(v) உருளை (Cylinder) : வட்டக் குறுக்கு வெட்டுத் தோற்றமுள்ள ஓர் உருளையின் நிலைமத் திருப்புத்திறனை அதன் அச்சைப் பொறுத்துப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்: உருளையை அச்சுக்கு நேர்க்குத்தான பல வட்டத் தட்டுகளாகப் பிரிக்கலாம். இத்தகைய வட்டத் தட்டுகளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை உருளையின் நிலைமத் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாதலால்,

$$I = \frac{1}{2} m a^2 \text{ ஆம்.}$$

இதில் m உருளையின் நிறையையும் a ஆரத்தையும் குறிக்கின்றன.

(vi) கோளம் (Sphere) : m நிறையுடைய கோளத்தின் ஆரம் a என்போம். அதன் அடர்த்தி ρ என்போம். இக்கோளத்தின்



படம் 54

ஏதேனுமொரு விட்டத்தைப் (diameter) பொறுத்து அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறனைக் கணக்கிடுவோம். கோளத்தை இவ்விடத்திற்கு நேர்க்குத்தான பல வெவ்வேறு ஆரங்கள் கொண்ட வட்டத் தட்டு களாகப் பிரிக்கலாம்.

இத்தகைய வட்டத் தட்டொன்றின் தொலைவு மையத்திலிருந்து x -எனவும், அதன் தடிப்பு (Thickness) dx-எனவும், ஆரம் y -என வும் கொள்வோம். அதன் நிறை $= \pi y^2\, dx\, \rho$ ஆகும். எனவே, x–அச்சைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன், சமன்பாடு (56.4)-லிலிருந்து

$$dI = \tfrac{1}{2}\pi y^2\, dx\, \rho . y^2$$

ஆனால், $y^2 = a^2 - x^2$ ஆகும். ஆதலால் கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I = \int_{-a}^{+a} \tfrac{1}{2}\pi\rho\,(a^2 - x^2)^2\, dx$$

இதனை விரித்தெழுதித் தொகு ஆக்கம் செய்து

$$I = \frac{8}{15}\pi\rho\, a^5$$

எனக் காட்டலாம். ஆனால், $\frac{4}{3}\pi a^3 \rho = m$ ஆம்.

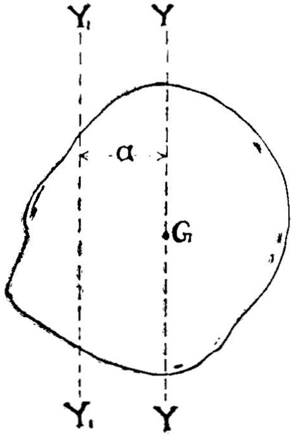
ஆதலால், $I = \dfrac{2}{5} ma^2$ (56.5)

எனவே, விட்டமொன்றைப் பொறுத்துக் கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $\dfrac{2}{5}\; ma^2$ ஆகும்.

57. இணை அச்சுக்கோடுகளின் தேற்றம் (Theorem of parallel axes)

M–நிறையுள்ள பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் ஓர் அச்சுக்கோட்டைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறன் I ஆனால், அக்கோட்டிலிருந்து a -தொலைவிலுள்ள அதற் கிணையான மற்றொரு அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து அப்பொரு ளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $(I + Ma^2)$ ஆகும். இதுவே இணை அச்சுக் கோடுகளின் தேற்றமாகும்.

G என்பது பொருளின் புவியீர்ப்பு மையமென்போம். YY என்ற G-யின் வழியே செல்லும் கோட்டைப் பொறுத்துப் பொரு ளின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் I ஆகும். Y_1Y_1 என்பது YYக்கு இணையான மற்றொரு கோடு. YY என்ற கோட்டிலிருந்து x-தொலை வில் உள்ள m நிறையுள்ள ஒரு துகளின் நிலைமத்திருப்பு திறன் YY



படம் 55

என்ற கோட்டைப் பொறுத்து mx^2 ஆகும். Y_1Y_1 என்ற கோட்டைப் பொறுத்து அதே துகளின் நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$= m\,(x-a)^2$$

$$= mx^2 + ma^2 - 2ma\,x \text{ ஆகும்,}$$

எனவே, Y_1Y_1-ஐப் பொறுத்துப் பொருளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் I_1 எனில்,

$$I_1 = \Sigma\, mx^2 + \Sigma\, ma^2 - 2a\ \Sigma mx$$
$$= I + a^2\ \Sigma\, m - 2a\ \Sigma\, mx$$

எனவே, $I_1 = I + Ma^2 - 2a\ \Sigma\, mx$ (57.1)

புவியீர்ப்பு மையத்தின் வரையறைப்படி புவியீர்ப்பு மையம் $\bar{x}$ என்ற தொலைவிலிருந்தால்

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, mx}{\Sigma\, m} \quad (57.2)$$

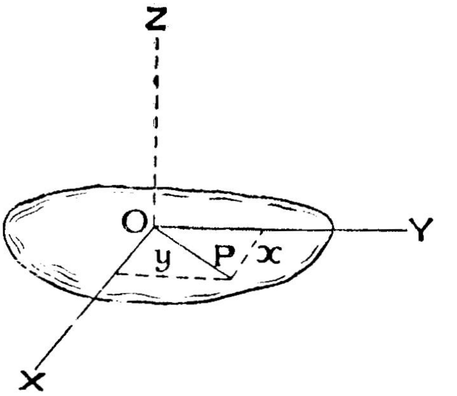
புவியீர்ப்பு மையம் YY என்ற கோட்டின் மீதே உள்ளதாதலால் $\bar{x} = 0$; எனவே சமன்பாடு (57.2)-இலிருந்து $\Sigma mx = 0$. ஆதலால்,

$$I_1 = I + Ma^2 \quad (57.3)$$

இவ்வாறு இணை அச்சுக்கோடுகளின் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

58. நேர்குத்தச்சுக் கோடுகளின் தேற்றம் (Theorem of perpendicula axes)

O-வில் சந்திக்கும் O_x, O_y என்ற இரு நேர்குத்துக் கோடுகளைப் பொருத்துப் பொருளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்கள்



படம் 56

முறையே I_x, I_y ஆனால், O_z என்ற, x OY தளத்துக்கு நேர்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$= I_x + I_y + I_z \text{ ஆகும்.}$$

P-என்ற புள்ளியில் உள்ள ஒரு துகளின் நிறை m ஆனால் O_z -ஐப் பொறுத்து அத்துகளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $= m.\dot{O}P$ ஆகும். P- யின் x, y ஆயங்கள் முறையே x, y ஆனால்,

$$m \cdot OP^2 = m\,(x^2+y^2)$$

$$\therefore \quad \sum m \cdot OP^2 = \sum mx^2 + \sum my^2$$

ஆதலால், $I_z = I_x + I_y$ (58.1)

இவ்வாறு நேர்குத்தச்சுக் கோடுகளின் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

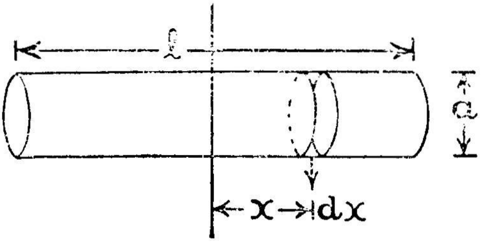
59. உருளை, கோள ஓடு ஆகியவற்றின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்கள் (M. I. of a Cylinder and spherical shell.)

(i) உருளை : இப்பகுதியில் உருளையின் அச்சுக் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுவோம்.

முதலில் அச்சுக்கு நேர்க்குத்தான, உருளையின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் கோட்டைப் பொறுத்து நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் காண்போம்.

உருளையின் நீளம் l எனவும், ஆரம் a எனவும் கொள்வோம். ρ-அதன் அடர்த்தியைக் குறிக்கட்டும். உருளையை அதன் அச்சுக் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்தான தளங்களால் பல சிறிய வட்டத் தட்டு களாகப் பிரிக்கலாம். அத்தகைய தகடொன்று அதன் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து x தொலைவில் உள்ளதாகக் கொள்வோம். அத் தகட்டின் தடிப்பு (Thickness) dx ஆனால், அதன் நிறை

$$= \pi a^2 \, dx \, \rho \text{ ஆகும்.}$$



படம் 57

அதன் அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$= \tfrac{1}{2} \pi a^2 \, dx \, \rho . a^2 \text{ ஆம்.}$$

நேர்குத்துஅச்சுக் கோடுகளின்தேற்றப்படி இந் நிலைமத்திருப்புத் திறன் அத்தட்டின் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தான இரு விட்டங் களைப்பொறுத்த நிலைமத்திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே, விட்டத்தைப் பொறுத்துத் தட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{\pi a^2 \, dx \, \rho . a^2}{4} \text{ ஆக இருக்கும்.}$$

எனவே, உருளையின் மையத்தின் வழியே செல்லும் அவ்விட்டத் திற்கு இணையான கோட்டைப் பொறுத்து அத்தட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன், இணை அச்சுக் கோடுகளின் தேற்றப் படி

$$dI = \frac{\pi a^4 \, dx \, \rho}{4} + \pi a^2 \, dx \, \rho . x^2 \qquad (59.1)$$

எனவே, உருளையின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\pi a^4 \, dx \, \rho}{4} + \int_{-l/2}^{+l/2} \pi a^2 \rho \, x^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi a^4 \rho}{4} l + \pi a^2 \rho \frac{l^3}{12}$$

$$= \pi a^2 l \rho \left[\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right]$$

ஆனால், $\pi a^2 l \rho$ என்பது உருளையின் நிறையைக் குறித்தால், உருளையின் நிறை M ஆனால், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும், அச்சுக்கு நேர்க்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I = M \left[\frac{a^2}{4} + \frac{l^2}{12} \right] \qquad (59.2)$$

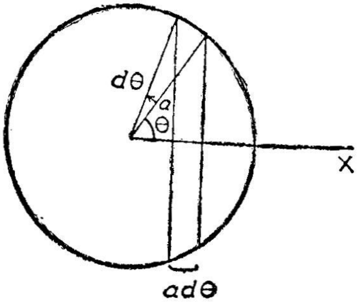
ஆகும்.

இதிலிருந்து அக்கோட்டுக்கு இணையான மற்ற கோடுகளைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத்திறன்களைக் காணலாம்.

கோள ஓட்டொன்றின் விட்டத்தைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத் திறன் (MI of a spherical shell about a diameter):

a- ஆரமாகவும், ஓரலகுப் பரப்பின் நிறை m- ஆகவும், C- மையமாகவும் உள்ள ஒரு கோள ஓடு (spherical shell) அதன் ஏதேனுமொரு விட்டத்துக்கு நேர்க்குத்தாகப் பல சிறு வளையப் பகுதிகளாகப்பிரிக்கப் படுவதாகக் கொள்வோம்

C-யிலிருந்து x- தொலைவிலுள்ள ஒரு வளையத்தின் பரப்பினைப் படத்தில் உள்ள குறியீடுகளைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்.



படம் 58

	வளையத்தின் சுற்றளவு	$= 2\pi . y$
	அதன் அகலம்	$= a\, d\theta$
எனவே,	பரப்பு	$= 2\pi y . a\, d\theta$
		$= 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$
	அதன் நிறை	$= 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta . m.$

எனவே, அதன் அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து நிலைமத் திருப்புத் திறன் $= 2\pi a^2 m \sin\theta \,.\, d\theta \,.\, y^2$

$$= 2\pi m a^4 \sin^3\theta \, d\theta.$$

எனவே, கோள ஓட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I = \int_0^{\pi} 2\pi\ ma^4 \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= 2\pi\ ma^4 \int_0^{\pi} (-\sin^2\theta)\, d(\cos\theta)$$

$$= 2\pi\ \ {}^4 \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{8}{3}\pi\ m\ a^4$$

ஆனால், கோள ஓட்டின் நிறை $M = 4\pi a^2 m$ ஆதலால், விட்டத்தைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I = \frac{2}{3} Ma^2 \qquad \text{ஆகும்.} \qquad (59{\cdot}3)$$

60. பயிற்சிகள் (Exercises):

விளக்கக் கணக்கு (1):

ஒரு துகள் சீரியல்பான இயக்கத்திலுள்ளது. சமநிலைப் புள்ளியிலிருந்து முறையே x_1, x_2 என்ற தொலைவுகளில் உள்ள போது, அதன் திசைவேகங்கள் முறையே v_1, v_2 ஆனால், அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

சமன்பாடு (81·6)-லிருந்து

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

எனவே, $v_1 = \omega\sqrt{A^2 - x_1^2}$

$$v_2 = \omega\sqrt{A^2 - x_2^2}$$

$$v_1^2 - v_2^2 = \omega^2 (x_2^2 - x_1^2)$$

$$\therefore \qquad \omega = \sqrt{\frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$$

அலைவு நேரம் $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}$$

விளக்கக் கணக்கு (2):

5 கிலோகிராம் நிறையுள்ள இரு துகள்கள் 1 மீட்டர் நீளமுள்ள எடையற்ற ஒரு கோலின் முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) அக் கோலின் மையப்புள்ளியின் வழியே செல்லும் அதற்கு நேர்க்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து இத் தொகுதியின் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

(ii) ஒரு துகளின் வழியே செல்லும், கோலுக்கு நேர்க்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத்திறனைக் கணக்கிடுக.

(i) கோலின் மையப் புள்ளியின் வழியே செல்லும் நேர்க்குத்துக் கோட்டைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I_o = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$= 5 \times (0{\cdot}5)^2 + 5 \times (0{\cdot}5)^2$$

$$= 2.5 \text{ கிலோகிராம்/மீட்டர்}^2$$

(ii) ஒரு துகளின் வழியே செல்லும் நேர்க்குத்துக் கோட்டைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$I = 5 \times 0 + 5 \times (1)^2$$

$$= 5 \text{ கிலோகிராம்/மீட்டர}^2$$

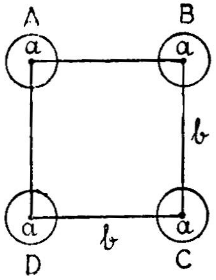
எனவே, $I = 2 I_o$

விளக்கக் கணக்கு (3):

a என்ற ஆரமும், M என்ற நிறையும் கொண்ட நான்கு கோளங்கள் b என்ற பக்கமுள்ள ஒரு சதுரத்தின் மூலைகளில் அமைக்கப் பட்டுள்ளன. ஏதேனுமொரு பக்கத்தைப் பொறுத்து இத் தொகுதியின் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக.

A, B, C, D என்பன சதுரத்தின் முனைகளில் உள்ள நிறைகளைக் குறிக்கட்டும்.

AB என்ற அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து A, B ஆகிய நிறைகளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்



படம் 59

$$= \frac{2}{5} Ma^2 + \frac{2}{5} Ma^2$$

$$= \frac{4}{5} Ma^2$$

அதேபோல CD என்ற அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து C, என்ற நிறைகளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{4}{5} Ma^2$$

இணை அச்சுக் கோடுகளின் தேற்றப்படி AB என்ற அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து C, D ஆகிய நிறைகளின் நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$= \frac{4}{5} Ma^2 + 2Mb^2$$

எனவே, AB என்ற அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்துத் தொகுதியின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{4}{5} Ma^2 + \frac{4}{5} Ma^2 + 2Mb^2$$

$$= \frac{8}{5} Ma^2 + 2Mb^2$$

விளக்கக் கணக்கு (4):

ஒரு உருளையின் அச்சுக் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்தாக அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கோட்டைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத்திறன், அதன் நிறை **M** ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுள்ளபோது, சிறும மதிப்புடன் இருக்க வேண்டுமானால்

அதன் நீளத்துக்கும், ஆரத்துக்குமிடையேயுள்ள விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

உருளேயின் ஆரம் a ஆகவும், நீளம் l ஆகவும் இருந்தால், புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்கின்ற உருளேயின் அச்சுக் கோட்டுக்கு நேர்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து அதன் நிலேமத் திருப்புத் திறன்

$$\mathrm{I} = \mathrm{M}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{12}\right) \qquad \text{[சமன்பாடு (59·2)]}$$

M நிலேயானது ஆதலால்,

$$\frac{d\mathrm{I}}{da} = \mathrm{M}\left(\frac{2a}{4} + \frac{2l}{12}\cdot\frac{dl}{da}\right)$$

I சிறும மதிப்புடனிருக்க வேண்டுமானுல்,

$$\frac{d\mathrm{I}}{da} = 0 \text{ ஆகவேண்டும்.}$$

எனவே,
$$\frac{2a}{4} + \frac{2l}{12}\cdot\frac{dl}{da} = 0$$

அல்லது,
$$\frac{dl}{da} = -\frac{3a}{l}$$

நிறை $\mathrm{M} = \pi a^2 l\rho$ ($\rho \rightarrow$ அடர்த்தி) ஆதலால்,

$$\frac{d\mathrm{M}}{da} = 2\pi a\, l\rho + \pi a^2 \frac{dl}{da}\rho$$

$$= 0 \text{ ஆக வேண்டும்.}$$

எனவே,
$$\frac{dl}{da} = -\frac{2l}{a}$$

எனவே, நிலேமத் திருப்புத்திறன் I சிறும மதிப்புடனிருக்க

$$\frac{dl}{da} = -\frac{3a}{l} = -\frac{2l}{a} \text{ ஆக வேண்டும்.}$$

எனவே $3a^2 = 2l^2$

அல்லது,
$$\frac{l}{a} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

பயிற்சிக் கணக்குகள் : (1) ஒரு சீரியல்பான இயக்கத்திலுள்ள துகளின் உச்ச இடப்பெயர்ச்சி 15 செ.மீ. அதன் அதிர்வெண் 4 அதிர்வுகள்/செகண்டு. (i) அதன் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் பெரும மதிப்பைக் கணக்கிடுக. (ii) 9 செ.மீ. இடப்பெயர்ச்சியுள்ளபோது அதன் முடுக்கம் திசைவேகம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. (iii) சமநிலைப் புள்ளியிலிருந்து 12 செ.மீ. தொலைவில் உள்ள புள்ளியை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் காலத்தைக் கணக்கிடுக.

(2) 10 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருள் 4 செகண்டு அலைவு நேரமுள்ள சீரியல்பான இயக்கத்திலுள்ளது. அதன் வீச்சு 24 செ.மீ. $t = 0$ எனும் போது அதன் இடப் பெயர்ச்சி = 24 செ.மீ. ஆனால் (i) $t = 0.5$ செகண்டில் அப்பொருள் இருக்குமிடத்தைக் கணக்கிடுக. (ii) $t = 0.5$ செகண்டு எனும்போது அப்பொருளின் மீது செயல்படும் விசையின் திசையையும் எண்மதிப்பையும் கணக்கிடுக. (iii) − 12 செ.மீ. இடப்பெயர்ச்சி அதன் தொடக்க நிலையிலிருந்து அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் கால அளவு என்ன? (iv) − 12 செ.மீ. இடப் பெயர்ச்சியுள்ளபோது அதன் திசைவேகம் என்ன?

(3) 100 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு நீண்ட சுருள் வில்லின் முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலைப் புள்ளியிலிருந்து 10 செ.மீ. கீழே இழுத்து விட்டபோது அதன் அலைவு நேரம் 2 செகண்டாக இருந்தால் (i) சமநிலைப் புள்ளியைக் கடக்கும்போது அதன் திசைவேகம் என்ன? (ii) சமநிலைப் புள்ளிக்கு மேலே 5 செ.மீ. தொலைவில் உள்ள போது அதன் முடுக்கம் என்ன? (iii) கீழிருந்து மேலே செல்கையில் கீழே 5 செ மீ. தொலைவில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து மேலே 5 செ.மீ, தொலைவில் உள்ள புள்ளிக்குச் செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் காலம் எவ்வளவு? (iv) பொருளை அகற்றிவிட்டால் வில்லின் நீளம் எவ்வளவு குறையும்?

(4) 4.9 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரு சுருள் வில்லின் முனையில் தொங்க விடப்பட்டுள்ளபோது அதன் அலைவு நேரம் 0,5 செகண்டு. அப்பொருளை நீக்கி விட்டால் வில்லின் நீளம் எவ்வளவு குறையும்?

(5) சீரியல்பான இயக்கத்திலுள்ள ஒரு துகள் சமநிலைப் புள்ளியைக் கடக்கும்போது அதன் வேகம் 12 செ.மீ./செகண்டு. அதன் வீச்சு 2 செ.மீ. ஆனால் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

(6) ஒரு U- வடிவக் குழாயில் பாதரசம் 20 செ.மீ. உயரத்துக்குப் பாதரசம் நிற்கிறது. ஒரு புறம் பாதரசத்தைச் சற்றுக் கீழே அழுத்தி விட்டு விட்டால் அக்குழாயில் பாதரசம் மேலும் கீழும்

செல்லும் இயக்கம் சீரியல்பான தெனக் காட்டுக. அதன் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

(7) சீரில்பான இயக்கத்திலுள்ள ஒரு துகள் அதன் சமநிலைப் புள்ளியைக் கடக்கும்போதுள்ள வேகம், அதன் வீச்சில் $\frac{\sqrt{3}}{3}$ பங்குள்ள தொலைவில் உள்ள புள்ளியிலுள்ளதைப் போல் இருமடங்கெனக் காட்டுக.

(8) 2 செ.மீ. ஆரமுள்ளதும் 10 கிராம் நிறையுள்ளதுமான ஒரு சோதனைக் குழாய் மிதவை (test tube float), அதனுள் 10 கிராம் பாதரசத்தை விட்டு நீரில் மிதக்க விடப்பட்டுள்ளது. அதனைச் சற்றே நீரில் அமுக்கி விட்டால், அதன் இயக்கம் சீரியல்பான தெனக் காட்டுக. அதன் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக.

(9) 5 செ.மீ. ஆரமுள்ளதும் 0·2 கிலோகிராம் நிறையுள்ளதுமான ஒரு சீரான வட்டத்தட்டின் விளிம்பில் உள்ள புள்ளியொன்றின் வழியே செல்லும், தளத்துக்கு நேர்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக.

(10) A, B, C என்ற முறையே 3, 1, 2 கிலோகிராம் நிறையுடைய மூன்று சிறு பொருட்கள் மூன்று எடையற்ற உறுதியான தண்டுகளால் AB = 50 செ.மீ; BC = 30 செ.மீ; AC = 40 செ.மீ என உள்ளவாறு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. (i) A-யின் வழியே ABC என்ற தளத்துக்கு நேர்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து அவ்வமைப்பின் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக. (ii) BC என்ற கோட்டைப் பொறுத்து நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக.

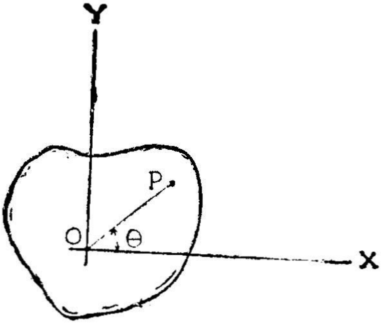
(11) 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள இரு வட்டத் தகடுகள் 40 செ மீ. நீளமும், 4 செ.மீ. விட்டமும் கொண்ட தண்டின் முனையில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. தண்டின் அடர்த்தி 7800 கிலோகிராம்/கன மீட்டராகவும், தகடுகளின் ஆரம் 10 செ.மீ. ஆகவும் இருந்தால், தண்டிற்கு நேர்குத்தாகத் தண்டின் மையப்புள்ளி வழியே செல்லும் கோட்டைப் பொறுத்து இவ்வமைப்பின் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக.

61. கோணத் திசை வேகம் (Angular Velocity)

ஒரு திண்பொருளின் (rigid body) எல்லாத் துகள்களும் மையங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளவாறு வட்டப் பாதைகளில் இயங்கினால் அப்பொருள் சுழற்சி இயக்கம் (rotational motion) மட்டும் உடையதாகும். இந்தச் சுழற்சி அச்சுக் கோட்டுக்கு (axis of rotation) ஒவ்வொரு துகளிலிருந்தும் நேர்குத்துக் கோடுகள்

வரைந்தால், அக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட நேர இடைவெளியில் (time interval) ஒரே அளவு கோணம் சுழற்சியுற்றிருக்கும்.

O- என்ற புள்ளியின் வழியே தாளின் தளத்துக்கு நேர்குத்தான அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்துச் சுழலும் திண்பொருளில் P- என்ற துகளை எடுத்துக் கொள்வோம். PO என்பது சுழற்சி அச்சுக்கு நேர்குத்துக்கோடு. இக் கோடு ஏதேனுமொரு சுட்டுக் கோடு



படம் 60

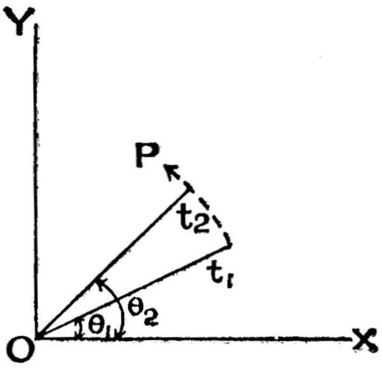
(reference line) Ox- உடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ- வை அறிந்தால் பொருளின் நிலையை முற்றிலும் அறியலாம். θ- என்பது எடுத்துக் கொண்ட சுட்டுக் கோட்டைப் பொறுத்துத் துகளின் கோண நிலையாகும். (angular position). கடிகார எதிர்த்திசையில் θ அதிகரிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

s என்பது R- ஆரமுள்ள ஒரு வட்ட வில்லின் நீளத்தைக் குறித்தால், அவ்வில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\theta = \frac{s}{R}$ இதில் θ ரேடியன் கோண அளவில் இருக்கும்.

OP என்ற கோடு t_1 என்ற கணத்தில் θ_1 என்ற கோணத்தையும், t_2 என்ற கணத்தில் θ_2 என்ற கோணத்தையும் உண்டாக்கினால், துகளின் கோணத் திசைவேகம் (angular velocity)

$$= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \text{ ஆகும்.}$$

$(t_2 - t_1)$ என்பதன் மதிப்பு, சுழியை (zero) நெருங்கும்போ இதனை $\frac{d\theta}{dt}$ என எழுதலாம். எனவே கோணத் திசை வேகம்



படம் 61

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{61·1}$$

திண்பொருளைப் பொறுத்த மட்டில் எல்லாத் துகள்களும் ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் ஒரே அளவு கோண இடப் பெயர்ச்சி (angular displacement) யுறுதலால், ω எல்லாத் துகள் களுக்கும், அதாவது திண்பொருள் முழுமைக்கும் பொருந்துவ தாகும்.

கோணத் திசைவேகம் மாறும்போது கோண முடுக்கம் (angular acceleration) உள்ளது எனக் கூறுகிறோம். இக் கோண முடுக்கம்

$$a = \frac{d\omega}{dt} \text{ ஆகும்.} \tag{61·2}$$

எனவே கோணப் பெயர்ச்சி, கோணத் திசைவேகம், கோண முடுக்கம் ஆகியவற்றை இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றை வரையறுத்தது போலவே வரையறுக்கலாம்.

62. சுழற்சி இயக்கச் சமன்பாடுகள் (equations of rotational motion):

நிலையான கோண முடுக்கத்துடன் (uniform angular acceleration) உள்ள சுழற்சிக்கு இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தில் பெற்றது போலவே இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் (equations of motion) பெறலாம். கோண முடுக்கம்

$$a = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{ஆதலால் } a\, dt = d\omega$$

எனவே கோண முடுக்கம் சீரானதாக உள்ளபோது, $t = 0$ எனும்போது கோணத் திசை வேகம் ω_o ஆகவும், $t = t$ எனும் போது கோணத் திசைவேகம் ω ஆகவும் இருந்தால்,

$$\int_0^t \alpha\, dt = \int_{\omega_o}^{\omega} d\omega$$

$$\therefore \qquad \alpha t = \omega - \omega_o$$

அல்லது $\qquad \omega = \omega_o + \alpha t \qquad (62 \cdot 1)$

மேலும் $\qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$ ஆதலால்

$\frac{d\theta}{dt} = \omega_o + \alpha t$ என்பதன் தொகு ஆக்கம் கண்டால்

$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ எனக் கிடைக்கும். $\qquad (62 \cdot 2)$

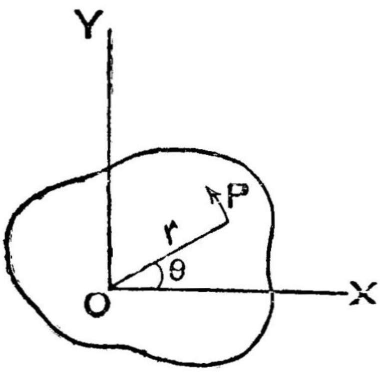
இதே போன்று $\qquad \omega^2 = \omega_o^2 + 2 \alpha \theta \qquad (62 \cdot 3)$

என்ற சமன்பாட்டையும் பெற இயலும்.

இச் சமன்பாடுகளில் θ, ω, α என்பன கடிகாரத் திசையில் எதிர்க்குறியுடனும், எதிர்த் திசையில் நேர்க்குறியுடனும் இருப்பன வாகும்.

63. திசைவேகமும், கோணத் திசைவேகமும் (velocity and angular velocity)

P என்ற துகளின் இயக்கத்தைக் காண்போம். இது திண் பொருள் சுழலும்போது OP = r என்ற வட்டத்தில் சுழலும்.



படம் 62

θ - கோணம் சுழற்சி யுறும்போது r- ஆரமுள்ள வட்ட வில்லின் நீளம் s ஆக இருந்தால்

$$s = \theta r \tag{63·1}$$

P-யின் வேகம் (speed) $v = \dfrac{ds}{dt}$ ஆதலால்

$$v = r\frac{d\theta}{dt} = r\,\omega \tag{63·2}$$

[P-யைப் பொறுத்தவரை r- ஓர் மாறிலி]

மேலும், $\dfrac{dv}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt}$ ஆதலால்,

$$\frac{dv}{dt} = r\,a \tag{63.3}$$

$\dfrac{dv}{dt}$ என்பது P-யின் தொடுகோட்டு முடுக்கம் என முன்னர் கண்டோம். இதனை a_T எனக் குறித்தால்

$$a_T = r\,a \tag{63.4}$$

P-யின் இயல்புக்கோட்டு முடுக்கம் $a_R = \dfrac{v^2}{r}$ ஆதலால் சமன்பாடு (63.2)-லிருந்து

$$a_R = \omega^2\,r \tag{63.5}$$

இதுவரை நாம் இப்பகுதியில் கண்ட சமன்பாடுகளனைத்திலும் θ, ω, a என்பன முறையே கோணப் பெயர்ச்சி, கோணத் திசை வேகம், கோண முடுக்கம் ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புக்களையே குறிப்பிடுவனவாகும். ஆனால், சிறு கோணப் பெயர்ச்சிகள் வெக்டார் விதிகளுக் குட்படுதலால் இவைகளை வெக்டார் அளவுகளாகக் கருதலாம். அவ்வாறு கருதினால் பின்வரும் வெக்டார் சமன்பாடுகள் பொருந்தக் காணலாம்:

$$d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r} \tag{63.6}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{63.7}$$

$$\vec{a}_T = \vec{a} \times \vec{r} \tag{63.8}$$

எல்லாக் கோண வெக்டார்களும் $\vec{r}$, $\vec{s}$ என்ற வெக்டார்களுக்கு நேர்க்குத்தாக அச்சுக் கோட்டின் திசையில் உள்ளன. மேலும், மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள மூன்று வெக்டார்களும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தானவை என்பது தெளிவு.

மேலும் a சுழியானால், $\vec{a}_T$ சுழியானாலும், இயல்புக் கோட்டு முடுக்கம் $\vec{a}_R$ சுழியாவதில்லை. இது சீரான வட்ட இயக்கத்தில் மையநோக்கு முடுக்கம் (Centripetal a cceleration) உண்டு என்பதை உணர்த்துகிறது $\vec{a}_R$, $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள வெக்டார் தொடர்பினைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

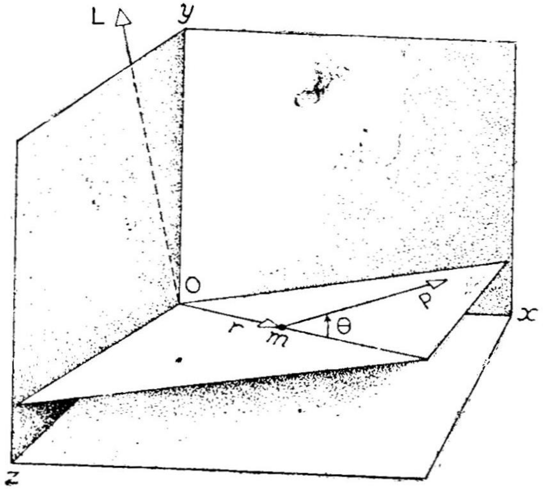
$$\vec{a}_R = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (63.9)$$

இச் சமன்பாடு $\vec{a}_R$-ன் சரியான எண் மதிப்பையும், திசையையும் கொடுக்கும்.

64. கோண உந்தம் (angular momentum)

நேர்கோட்டு இயக்கத்தில் உந்தம், உந்த அழிவின்மை விதி முதலியவைகளைக் கொண்டு பொருட்களின் இயக்கத்தின் தன்மைகளை எவ்வாறு தெளிவாக அறிந்து கொள்ள முடிந்ததோ அதே போலச் சுழற்சி இயக்கத்தின் தன்மைகளை அறிந்து கொள்ள கோண உந்தம், கோண உந்த அழிவின்மை விதி (Conservation of angular momentum) ஆகியவை பயன்படுகின்றன. இவை இன்றைய அணு இயல், அணுக் கருவியல், வானியல் மற்றும் பௌதிகத்தின் பல்வேறு துறைகளிலும் மிக முக்கியமான கொள்கைகளாகும்.

m நிறையுள்ள, $\vec{p}$ என்ற உந்தம் கொண்ட ஒரு துகளைக் காண்போம். துகளின் நிலையை (Position) $\vec{r}$ என்ற வெக்டார் குறிக்கட்டும். O-வைப் பொறுத்து அத்துகளின் கோண உந்தம் $\vec{L}$ பின்வரும் சமன்பாட்டின் மூலம் வரையறுக்கப்படுகிறது.



படம் 63

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (64.1)$$

$$\vec{L} \text{ -ன் எண்மதிப்பு } L = r\, p \sin\theta \qquad (64.2)$$

இதில் θ என்பது $\vec{r}$-லிருந்து $\vec{p}$-யைக் குறிக்கும் கோணமாகும். இப்போது கோண உந்தம், திருப்பு விசை (Troque) ஆகியவற்றிற் கிடையேயுள்ள தொடர்பினை நிறுவுவோம்.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ ஆதலால், } \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (64.3)$$

ஆனால், $(\vec{r} \times \vec{F})$ என்பது திருப்பு விசை $\vec{T}$ ஆதலால்,

$$\vec{T} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (64.4)$$

இப்போது சமன்பாடு *(64.1)*ஐ-நேரத்தைப் பொறுத்து வேறு படுத்தினல் (differentiate),

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

இதில் $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$; மேலும் $\vec{p} = m\vec{v}$ ஆதலால்,

$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right)$ என்பது சுழியாகும். ($\because \vec{v} \times \vec{v} = O$).

எனவே
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (64.5)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (64.4), (64.5) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T} \qquad (64.6)$$

எனவே கோண உந்த மாறுபாட்டு நேர விதம் (time rate of Change of angular momentum) திருப்பு விசைக்குச் சமம். நியூட்டனின் இரண்டாம் இயக்க விதியுடன் இதனை ஒப்பிடலாம். அப்போது நேர்கோட்டு இயக்கத்தில் $\vec{p}$, $\vec{F}$ என்பன முறையே கோண உந்தம் $\vec{L}$, திருப்பு விசை T, ஆகியவைகளை யொத்து உள்ளன.

65. சுழற்சியின் இயக்க ஆற்றல் (rotational Kintic energy).

சுழற்சி இயக்கத்திலுள்ள பொருளின் ஒவ்வொரு துகளும் இயக்க ஆற்றல் கொண்டது. சுழற்சி அச்சிலிருந்து (axis of rotation) r-தொலைவில் உள்ள, m-நிறையுள்ள ஒரு துகளின் திசை வேகத்தின் மதிப்பு v ஆனால், அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2$

ஆனால், $v = \omega r$ ஆதலால், இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

எனவே, திண்பொருளின் மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$K = \frac{1}{2} \sum mr^2 \omega^2$$

எல்லாத் துகள்களுக்கும் கோணத் திசைவேகம் மாறுவதில்லையாதலால்

$$K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum mr^2 \text{ என எழுதலாம்.}$$

ஆனால், $\sum mr^2$ என்பது பொருளின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் I ஆதலால்

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (65.1)$$

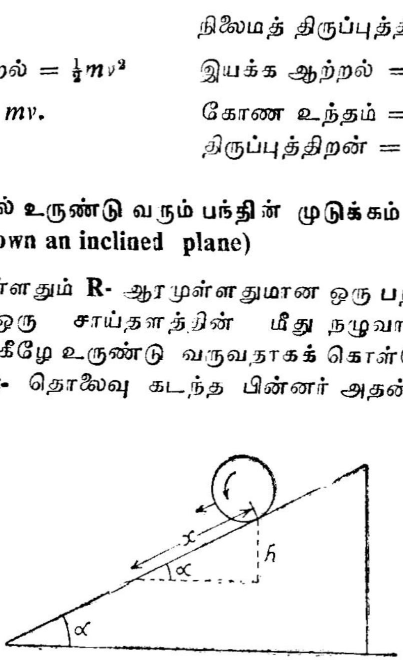
இது துகள்களின் தனித்தனி வேகங்களைப் பொறுத்த இயக்க ஆற்றலே. ஆதலால் இது சுழற்சி இயக்கமுள்ள பொருட்களின் இயக்க ஆற்றலை எளிமையாகக் கூறும் ஒரு முறையே யாகும்

பின்வரும் அட்டவணையில் நேர்கோட்டு இயக்கத்திற்கான தொடர்புகளும், சுழற்சி இயக்கத்திற்கான தொடர்புகளும் ஒப்பிட்டுக் காட்டப்பட்டுள்ளன.

	நேர்கோட்டு இயக்கம்	சுழற்சி இயக்கம்
1.	திசைவேகம் $v = \frac{dr}{dt}$	கோணத் திசைவேகம் $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
	$v = \omega r$	
2.	முடுக்கம் $a = \frac{dv}{dt}$	கோண முடுக்கம் $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
3.	நிறை m	நிலைமத் திருப்புத்திறன் $= \mathrm{I}$
4.	இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2$	இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\omega^2$
5.	உந்தம் $p = mv$.	கோண உந்தம் $=$ உந்தத்தின் திருப்புத்திறன் $= \mathrm{I}\,\omega$.

66. சாய்தளத்தில் உருண்டு வரும் பந்தின் முடுக்கம் (acceleration of a ball rolling down an inclined plane)

M- நிறையுள்ளதும் R- ஆரமுள்ளதுமான ஒரு பந்து α சாய்வுக் கோணமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மீது நழுவாமல் (without slipping) தானே கீழே உருண்டு வருவதாகக் கொள்வோம். சாய் தளத்தின் மீது x- தொலைவு கடந்த பின்னர் அதன் நிலையாற்றல்



படம் 64

குறைவு $= Mgh$. x- தொலைவு கடக்கும்போது அதன் திசை வேகத்தின் மதிப்பு v ஆனால், அதன் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தால் தோன்றும் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}Mv^2$. உருண்டு கீழே வருதலால் உண்டாகும் சுழற்சியால் அப்பந்து பெறும் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\omega^2$ ஆகும். பந்து இழக்கும் நிலையாற்றல் (Potential energy) அதன் மொத்த இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாதல் வேண்டுமாதலால்,

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\,\omega^2 \text{ அல்லது}$$

$$Mg\,x \sin \alpha = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} (Mk^2) \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$\therefore \quad x\,g \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left[1 + \frac{k^2}{R^2}\right] \qquad (66\cdot1)$$

இதனை நேரத்தைப் பொறுத்து வேறுபாடு காண்போமானல்,

$$\frac{dx}{dt}\,g \sin \alpha = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \left[1 + \frac{k^2}{R^2}\right]$$

அல்லது

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g \sin \alpha}{\left[1 + \frac{k^2}{R^2}\right]} \qquad (66\cdot2)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ என்பது பந்தின் முடுக்கமாதலால், இதுவே சாய்தளத்தில் உருண்டு வரும் பந்தின் முடுக்கமாகும்.

சிறப்பு நிகழ்வுகள் :

(i) பந்து ஒரு கோளத் திண்மமாக இருந்தால்

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \text{ ஆதலால்,}$$

$$k^2 = \frac{2}{5} R^2 \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{எனவே, முடுக்கம்} = \frac{g \sin \alpha}{1 + 2/5} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

(ii) உருண்டு வருவது ஒரு கோளக் கூடாக இருந்தால்,

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \text{ ஆதலால்,}$$

$$k^2 = \frac{2}{3} R^2$$

$$\text{எனவே, முடுக்கம்} = \frac{g \sin \alpha}{(1 + 3/5)} = \frac{3}{5} g \sin \alpha.$$

(iii) உருளும் பொருள் உருளை வடிவத் திண்மமாக இருந்தால்,

$$I = \frac{MR^2}{2} \text{ ஆதலால்,}$$

$$k^2 = \frac{R^2}{2}$$

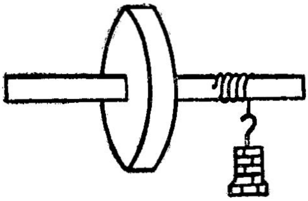
எனவே, முடுக்கம் $= \frac{2}{3} g \sin \alpha$ ஆகும்.

67. விசையாட் சுழலின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்(M.I. of a flywheel)

கிடைத்தள அச்சினைப் பொறுத்துச் சுழலக் கூடிய மிகப்பளு வான ஓர் இரும்புச் சக்கரத்தை விசையாட் சுழலி (flywheel) என்கிறோம். இதன் சுழற்சிக்குத் தடையாக இருக்கும் உராய்வினைக் (Friction) குறைக்க, இது சிறு சிறு குண்டுகளாலான தாங்கிகளின் மீது (ball bearings) அச்சுச் சுழலுமாறு அமைக்கப் பட்டிருக்கும். அச்சில் உள்ள ஒரு சிறு முளை அல்லது ஆணியில் மெல்லிய கயிறொன்று மாட்டப்பட்டு அக்கயிறு அச்சைச் சுற்றிப் பல முறை சுற்றப்பட்டிருக்கும். கயிற்றின் மறுமுனையில் தெரிந்த நிறை யொன்று தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. சுழலி அமைதி நிலையில் உள்ளபோது இந் நிறை விடப்பட்டால், அது புவியீர்ப்பால் கீழிறங்கும். அப்போது அச்சு, சுழலத் தொடங்குவதால், விசை யாட் சுழலியும் சுற்றத் தொடங்கும். நிறை தரையை அடைந்த வுடன் கயிறு ஆணியிலிருந்து நழுவிக் கீழே விழும். ஆனால், சுழன்றுக் கொண்டிருக்கும் விசையாட் சுழலி உடனே நின்று விடாமல், சற்று நேரத்திற்குப் பின்னரே சுழற்சியை நிறுத்தும்.

நிறையைத் தரையிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட உயரம் h வரை உயர்த்துவதற்கு விசையாட் சுழலியை N_1 சுற்றுக்கள் சுற்ற வேண்டு மெனக் கொள்வோம். இது h உயரத்திலிருந்து நிறை தரையை அடையும் வரை விசையாட் சுழலி சுற்றும் சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கையாகும். தரையை அடைய நிறை எடுத்துக் கொள்ளும் காலம் t- எனவும் தரையை அடைந்த பின்னர் விசை யாட் சுழலி சுற்றிய சுற்றுக்களின் எண்ணிக்கை N_2 எனவும் கொள்வோம்.

நிறை தரையை அடையும்போது நிலையாற்றல் இழப்பு $= mgh$. இவ்வாற்றலின் ஒரு பகுதி நிறைக்கும், விசையாட் சுழலிக்கும் இயக்க ஆற்றலைக் கொடுப்பதற்கும் மற்றொரு பகுதி உராய்வை எதிர்த்துப் பணிபுரிவதற்கும் பயன்படுகின்றன. நிறை தரையை அடையும்போது அதன் திசைவேகம் v எனவும், விசையாட் சுழலி யின் கோணத் திசைவேகம் ω எனவும், அதன் நிலைமத் திருப்புத்



படம் 65

திறன் I எனவும் ஒரு சுற்றின்போது உராய்வுக் கெதிராகப் புரியப் படும் பணி f எனவும் கொண்டால்,

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + N_1 f \qquad (67{\cdot}1)$$

நிறை தரையை அடைந்த பின்னர் விசையாட் சுழலியின் இயக்க ஆற்றல் முழுவதும் N_2 சுற்றுக்கள் உராய்வை எதிர்த்துப் பணிபுரிவதில் செலவிடப்படுகிறது.

எனவே, $$\frac{1}{2} I \omega^2 = N_2 f \qquad (67{\cdot}2)$$

ஆதலால், $$f = \frac{1}{2} I \frac{\omega^2}{N_2} \qquad (67{\cdot}3)$$

எனவே, சமன்பாடு (67·1)- லிருந்து

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \left[1 + \frac{N_1}{N_2}\right] \qquad (67{\cdot}4)$$

நிறை அமைதி நிலையிலிருந்து கீழே வருதலால் அதன் முடுக்கம் a ஆக இருந்தால்,

$$h = \frac{1}{2} at^2$$ ஆகும்.

எனவே, $$a = \frac{2h}{t^2} \qquad (67{\cdot}5)$$

ஆனால், $v = at$ ஆததால்,

$$v = \frac{2h}{t} \qquad (67{\cdot}6)$$

அச்சின் (axle) ஆரம் r ஆனல்,

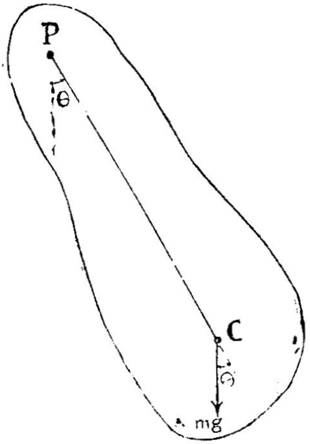
$$\omega = \frac{v}{r} \qquad (67{\cdot}7)$$

எனவே, v, ω, N_1, N_2 ஆகியவற்றைச் சோதனைவாயிலாக அறிய இயலுமாதலால், சமன்பாடு (67·4) - லிருந்து விசையாட் சுழலியின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் I - யைக் கணக்கிடலாம்.

68. கூட்டு ஊசல் (Compound pendulum)

புவியீர்ப்பு விசையால், நிலையான கிடைத்தள அச்சுக் கோடொன்றைப் பொறுத்துச் செங்குத்துத் தளத்தில் (vertical plane) அலைவுறக் கூடிய திண் பொருளைக் கூட்டு ஊசல் என்கிரேம்.

சமநிலையிலிருந்து ஏதேனுமொரு கணத்தில் பொருள் θ கோணம் விலகியிருப்பதாகக் கொள்வோம். சுழல் அச்சுக் கோட்டிலிருந்து (axis of rotation) புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவு d என்போம். சுழல் அச்சைப் பொறுத்துப் பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்



படம் 66

திறன் I ஆகவும், M பொருளின் நிறையாகவும் இருந்தால், θ கோணம் விலகியுள்ளபோது மீட்பு விசை (restoring troque) = $-Mg\, d \sin\theta$ ஆகும். இவ்விசை θ உயரும் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் உள்ளதால் — குறி இடுகிரேம்.)

ஆனல் மீட்பு விசை $T_o = \dfrac{dL}{dt}$ ஆதலால்

$$T_o = \frac{d}{dt}(I\,\omega) = I\,\frac{d\omega}{dt} = I\,\alpha \qquad (68.1)$$

எனவே, $$I\,\alpha = -M\,g\,d\sin\theta \qquad (68.2)$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{M\,g\,d}{I}\sin\theta$$

சிறு மதிப்புக்களுக்கு sin $\theta = \theta$ ஆதலால்

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}\theta \tag{68.3}$$

சிறு மதிப்புக்களுக்கு sin $\theta = \theta$ ஆதலால்

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}\theta \tag{68.3}$$

இது ஒரு சீரியல்பான இயக்கத்திற்கான சமன்பாடு ஆகும் இதன் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \tag{68.4}$$

θ- பெரியதாக இருந்தால் சமநேர அலைவுகளுண்டான போதிலும் (periodic motion), இயக்கம் சீரியல்பானதாக (simple harmonic) இருப்பதில்லை.

சிறப்பு நிகழ்வுகள் : (i) மேற்கூறிய வற்றில் **I** என்பது சுழல் அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத் திறனாகும். புவியீர்ப்பு மையத்தைப் பொறுத்த நிலைமத் திருப்புத்திறன் **I**. ஆனால்,

$$I = I_0 + Md^2$$
$$= Mk^2 + Md^2$$

$$\therefore \quad I = M(k^2+d^2) \tag{68.5}$$

இதனைச் சமன்பாடு (68.4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M(k^2+d^2)}{Mgd}}$$

அல்லது $$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+d^2}{gd}}$$ ஆகும். (68.6)

(ii) திண் பொருள் மெல்லிய, எடையற்ற l நீளமுள்ள நூலால் கட்டப்பட்ட பளுவான நிறை m ஆக இருந்தால்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

அதாவது, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{68.7}$$

இதுவே தனி ஊசலின் (smiple pendulum) அலைவு நேரத்தைத் தரும் சமன்பாடென நாம் அறிவோம்.

(iii) சமன்பாடு (68.4)-லிருந்து

$$I = \frac{T^2}{4\pi^2} Mgd \qquad (68.8)$$

ஆதலால், வலப்புறம் உள்ளவைகளை நேரடியாகக் கண்டறிந்தால் பொருளின் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடலாம்.

(iv) **இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளம் (length of equivalent smiple pendulum) :** கூட்டு ஊசலின் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

அதே அலைவு நேரங் கொண்ட தனி ஊசலின் நீளம் l ஆக இருந்தால்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ ஆகும்.}$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிட்டால்

$$l = \frac{I}{Md} \qquad (68.9)$$

இதனை இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளமென்கிறோம்.

$$I = M(k^2 + d^2) \text{ ஆதலால்,}$$

$$l = \frac{k^2 + d^2}{d} \qquad (68.10)$$

எனவே, அலைவு நேரத்தைப் பொறுத்தவரை கூட்டு ஊசலின் நிறை முழுதும், சுழல் அச்சுக் கோட்டிலிருந்து (axis of rotation) $= \frac{k^2 + d^2}{d}$ என்ற தொலைவில் C-க்கு அப்பால் உள்ள ஒரு புள்ளியில் செறிந்திருப்பதாகக் கொள்ளலாம். இந்தப் புள்ளியை அலைவு மையம் (centre of oscillation) அல்லது அலைவுப் புள்ளி (point of oscillation) என்கிறோம். எந்தப் பொருளுக்கும் அலைவுப் புள்ளி சுழல் அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்ததாகும்.

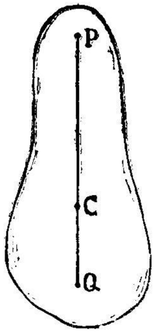
(v) **தொங்கு புள்ளியும், அலைவுப் புள்ளியும் (point of suspension and point of oscillation)**

Q என்பது அலைவு மையமாகவும், P என்பது சுழல் அச்சுக் கோடு செல்லும் புள்ளியாகவும் (அலைவுத் தளத்தின் வழியே), C புவியீர்ப்பு மையமாகவும் இருந்தால்,

$$PQ = l = \frac{k^2+d^2}{d}$$

$$\therefore \quad k^2 = d\,(l-d)$$

$$= PC \,.\, CQ$$



படம் 67

PC = h_1 எனவும், CQ = h_2 எனவும் கொண்டால்

$$k_2 = h_1\, h_2 \qquad (68.11)$$

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து P, Q ஆகிய புள்ளிகளை ஒன்றுக். கொன்று மாற்றினாலும் k_2 மாறுவதில்லை என்பது புலனாகிறது எனவே, அலைவு நேரமும் மாறுவதில்லை. எனவே அலைவுப் புள்ளியும், தொங்கு புள்ளியும் தங்கள் இடங்களைப் பரிமாற்றம் செய்யும் தன்மை கொண்டவை, (interchangeable).

69. சட்ட ஊசல் (bar pendulum)

சமன்பாடு (68 6) லிருந்து கூட்டு ஊசலின் அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2+d^2}{d\,g}}$$

புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து தொங்கு புள்ளியின் தொலைவு h_1 ஆனால்,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2+h_1^2}{h_1\,g}} \qquad (69.1)$$

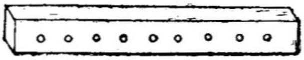
இத் தொங்கு புள்ளி புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டில், அதன் இருபுறமும் இருக்கலாமாதலால், புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து h_1 தொலைவிலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு அலைவு நேரம் T ஆக இருக்கும்.

அதேபோலப் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து அலைவுப் புள்ளியின் தொலைவு h_2 ஆனால்

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2+h_2^2}{h_2\,g}} \qquad (69.2)$$

எனவே புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து h_2 தொலைவில் அதன் இருபுறமும் உள்ளவேறு இரு புள்ளிகளுக்கும் அலைவு நேரம் T-ஆக இருக்கும்.

எனவே, ஒரே கோட்டில் உள்ள நான்கு புள்ளிகளில் அலைவு நேரங்கள் சம மதிப்புடையனவாய் உள்ளன. இதனைப் பயன் படுத்திப் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பைச் சட்ட ஊசலைக் கொண்டு அறிய இயலும். இச் சட்ட ஊசல் (bar pendulum) ஒரு



படம் 68

நீண்ட பல துகள்களையுடைய ஓர் உலோகக் கோலாகும். இவ்வுலோகக் கோலினை வெவ்வேறு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்க விட்டு, அலைவு நேரங்களைக் கணக்கிடலாம்.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2+h^2}{h\,g}}$$

ஆதலால், $h = 0$ எனும்போது

$T = \infty$ ஆகும். h-ன் மதிப்பு சிறியதாக உள்ள போது h^2 மிகச் சிறியதாக உள்ளதால், T-யின் மதிப்பு அதிகமாக இருக்கும். h-ன் மதிப்பு அதிகமாக அதிகமாக, T-யின் மதிப்புச் சிறிது சிறிதாகக் குறைந்து கொண்டே வந்து ஒரு சிறும மதிப்பை (minimum value) அடையும். மேலும் h-ன் மதிப்பு உயர்ந்தால் h^2 -வேகமாக உயர்வதால், T-அதிகமாகத் தொடங்கும்.

T-யின் சிறும மதிப்பைப் பின்வருமாறு பெறலாம். T-சிறுமமாக வேண்டுமானால் $\left(\frac{k^2+h^2}{h}\right)$ சிறும மாக வேண்டும்.

அல்லது $\frac{d}{dh}\left(\frac{k^2+h^2}{h}\right) = 0$ ஆகவேண்டும்.

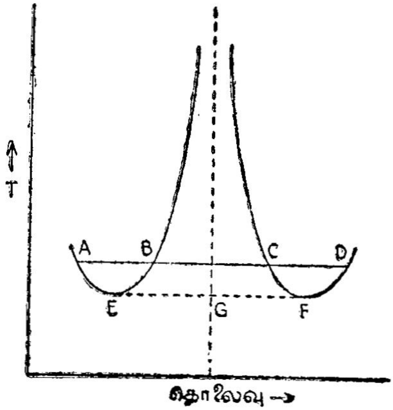
அதாவது, $\frac{d}{dh}\left(h + \frac{k^2}{h}\right)$

$$= 1 - \frac{k^2}{h^2} = 0 \text{ ஆக வேண்டும்.}$$

எனவே, $k = h$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எனவே புவியீர்ப்பு மையத்தின் இரு புறமும் சுழற்சி ஆரம் h அளவு தொலைவில் உள்ள இரு புள்ளிகளில் T-சிறும மதிப்புடன் இருக்க வேண்டும்.

கோலின் ஒரு முனையிலிருந்து வெவ்வேறு தொலைவுகளில் அதனைத் தொங்க விட்டு அலைவு நேரங்களைத் துல்லியமாகக் கணக்கிடுகிறோம். இதனை வரைபடமொன்றில் குறித்தால், படத்தில்



படம் 69

காட்டியுள்ளது போல் இருக்கும். படத்திலிருந்து A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகளில் அலைவு நேரங்கள் சமமாயிருக்கக் காண்கிறோம்.

A தொங்கு புள்ளியானால், C அலைவுப் புள்ளியாகும். B தொங்கு புள்ளியானால், D அலைவுப் புள்ளியாகும். அதே போல C-யோ, D யோ தொங்கு புள்ளியாக இருந்தால், முறையே A யோ அல்லது B-யோ அலைவுப் புள்ளியாக இருக்கும்.

எனவே, இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின் நீளம்

l = AC அல்லது BD ஆகும்.

$$\therefore \quad l = \frac{AC+BD}{2} \qquad (69.3)$$

இதனை $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ என்ற சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டு g -யின் மதிப்பைக் கணக்கிட இயலும்.

குறிப்பு : T-சிறும மதிப்புடையதாக உள்ளபோது $k = h$ ஆகும். எனவே

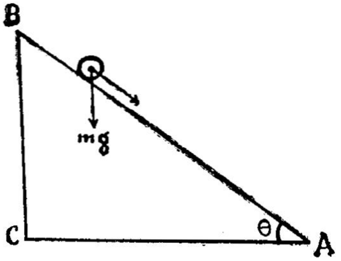
$$GE = GF = k \qquad (69.4)$$

கோலின் நிறை M தெரிந்திருந்தால் $I_{\circ} = Mk^2$ என்பதைப் பயன்படுத்திப் புவியீர்ப்பு மையத்தைப் பொறுத்து அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் I_0 -வைக் கணக்கிடலாம்.

70. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்கக் கணக்கு (1) : ஒரே நிறையும், ஆரமுடைய ஒரு கோளமும், ஒரு உருளையும் ஒரு சாய் தளத்தின் மேல் முனையில் உள்ளன. இரண்டும் ஒரே சமயத்தில் தளத்தில் உருண்டு வரத் தொடங்கினல் இரண்டில் எது முதலில் தளத்தின் அப் பகுதியை அடையும்?

உருளை : நிறை M எனவும் ஆரம் r எனவும் கொள்வோம். தளத்தைத் தொடு மிடத்தில் தளத்திற் கிணையானமேல் நோக்கிய உராய்வு விசை f என்போம். R என்பது எதிர்வினை விசைசைக் குறிக்கிறது.



படம் 70

தளத்திற்கிணையான இயக்கத்தைக் காண்போம். அப் பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகள் அனைத்தும் நிறை மையத்தில் செயல்படுவதாகக் கொண்டு, தளத்திற்கிணையாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் விசை F எனக் கொண்டால்,

$$F = Mg \sin \theta - f \text{ ஆனல்,}$$

$$F = Ma \text{ ஆதலால், } Ma = Mg \sin \theta - f. \text{ ஆம்.}$$

சுழற்சி இயக்கத்தைத் தோற்றுவிக்கும் திருப்பு விசைT ஆனல்,

$$T = I_0 \, a.$$

மையப் புள்ளியைப் பொறுத்து Mg, R ஆகியவற்றல் பொருளின் மீது திருப்பு விசை செயல்படுவதில்லை. எனவே,

$$T = fr$$

ஆதலால், $I_0 \, a = f r_0$

ஆனால், $I_o = \frac{1}{2} Mr^2; \quad \alpha = \frac{a}{r}$ ஆதலால்,

$$f = \frac{I_o \alpha}{r} = \frac{Ma}{2}$$

எனவே, $Ma = Mg \sin\theta - f$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$a = \tfrac{2}{3} g \sin\theta$$

எனக் கிடைக்கிறது.

கோளம்: இப்போது கோளத்தின் முடுக்கம் a_1 - ஐக் கணக்கிடுவோம்.

கோளத்துக்கு,

$$\left.\begin{aligned} Mg \sin\theta - f_1 &= Ma_1 \\ f_1 r = I\alpha_1 &= \tfrac{2}{5} M r^2 \cdot \frac{a_1}{r} \end{aligned}\right\} \text{ஆம்.}$$

எனவே, $f_1 = \frac{2}{5} Ma_1$

ஆதலால், $a_1 = \frac{5}{7} g \sin\theta$

எனவே, கோளத்தின் தளத்திற்கிணையான முடுக்கம் a_1, உருளையின் முடுக்கம் a - யை விட எப்போதும் அதிகமானது ஆகையால், கோளம் முதலில் தளத்தினடியில் வந்து சேரும்.

விளக்கக் கணக்கு *(2)*:

ஒரு வட்டத் தட்டு, சாய்தளமொன்றின் மீது அமைதி நிலையிலிருந்து கீழே உருண்டு வருகிறது. சாய்வு (inclination) $\frac{1}{100}$ ஆனால், அப்பொருள் 1 மீட்டர் தொலைவை 5·53 செகண்டில் கடந்தால், புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தைக் கணக்கிடு.

சமன்பாடு (66.2) - லிருந்து உருண்டு வரும் பொருளின் முடுக்கம்

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{k^2}{R^2}}$$

எனவே, $\sin\theta = \frac{1}{100}$; $k^2 = \frac{R^2}{2}$ ஆதலால்

$$a = \frac{g \times \frac{1}{100}}{1 + \frac{k^2}{2R^2}} = \frac{g}{150}$$

அமைதி நிலையிலிருந்து $\frac{g}{150}$ என்ற முடுக்கத்துடன் 1 மீட்டர் தொலைவை 5.53 செகண்டில் கடப்பதால்,

$$1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{g}{150} \cdot (5.53)^2$$

எனவே, $$g = \frac{300}{(5.53)^2}$$

$$= 9.811 \text{ மீட்டர்/(செகண்டு)}^2$$

விளக்கக் கணக்கு (3):

r ஆரமுள்ள உருளை வடிவ நூற்கண்டு ஒன்று நூலின் ஒரு முனையைக் கையில் பிடித்தவாறு கீழே விடப்படுகிறது. k என்பது நூற்கண்டின் சுழற்சி ஆரமானால், நூற்கண்டின் முடுக்கம்

$$= \frac{g\, r^2}{k^2 + r^2} \quad \text{எனக்காட்டுக.}$$

நூற்கண்டு h உயரம் கீழே விழுவதாகக் கொள்வோம். அதன் நிறை m ஆனால், நிலையாற்றல் இழப்பு $= mgh$. இது நூற்கண்டு அடைந்த இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாதல் வேண்டும்.

h உயரம் வீழ்ந்தபோது அதன் வேகம் v ஆனால், அதன் இயக்க ஆற்றல் உயர்வு

$$= \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I\, \omega^2$$

இதில் $I = mk^2; \quad \omega = \frac{v}{r}$ ஆதலால்,

$$\text{இயக்க ஆற்றல்} = \tfrac{1}{2} mv^2 \left[1 + \frac{k^2}{r^2}\right]$$

எனவே, $$mgh = \tfrac{1}{2} mv^2 \left[1 + \frac{k^2}{r^2}\right]$$

நூற்கண்டின் முடுக்கம் a ஆனால், h உயரம் விழும்போது அது பெறும் திசைவேகம் v ஆதலால்,

$$v^2 = 2\, ah.$$

எனவே, $$mgh = \tfrac{1}{2}\, m \,.\, 2\, a\, h\left[1 + \frac{k^2}{r^2}\right]$$

$$\therefore \qquad a = \frac{g}{\left[1 + \frac{k^2}{r^2}\right]}$$

விளக்கக் கணக்கு (4):

ஒரு வட்டத் தட்டின் விட்டமொன்றின் வழியே பல சிறு துளைகள் இடப்பட்டுள்ளன. இத் தட்டை ஏதேனுமொரு துளை வழியே செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப் பொறுத்து செங்குத்துத் தளத்தில் அலைவுறச் செய்ய இயலும். r என்பது தட்டின் ஆரமானால் அலைவு நேரம் T - யின் மீச்சிறு மதிப்பு $T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}R}{g}}$ எனக் காட்டுக

சமன்பாடு (68.6) - லிருந்து அலைவு நேரம்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+d^2}{gd}}$$

என அறிவோம்.

இதில் k என்பது புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் அச்சைப் பொறுத்த சுழற்சி ஆரத்தையும், d என்பது தொங்கு புள்ளியிலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவையும் குறிக்கின்றன.

அலைவு நேரம் மீச்சிறு மதிப்புடனிருக்க வேண்டுமானால், $k=d$ ஆகவேண்டும்.

$$I = Mk^2 = \frac{Mr^2}{2} \quad \text{ஆதலால்} \quad k = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

எனவே அலைவு நேரத்தின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+d^2}{dg}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2k^2}{kg}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{\sqrt{2}g}}$$

எனவே, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}r}{g}}$$

விளக்கக் கணக்கு (5):

6 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு சக்கரம் கிடைத்தள அச்சைப் பொறுத்துச் சுழலுமாறு அமைக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் விளிம்பில் சுற்றப்பட்ட மெல்லிய நூலொன்று 200 கிராம் எடையைத் தாங்குகிறது. 200 கிராம் நிறையைக் கீழே வர விட்டால், 1 மீட்டர்

தொலைவை அது 5 செகண்டுகளில் கடந்தால் சக்கரத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக.

நிறையின் முடுக்கம் a ஆனால், $s = \frac{1}{2} at^2$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2}{25} \text{ மீட்டர்/(செகண்டு)}^2$$

மேலும், 1 மீட்டர் தொலைவில் அது அடைந்த வேகம் v ஆனால்,

$$v = at = \frac{2}{5} \text{ மீட்டர்/செகண்டு.}$$

சக்கரத்தின் விளிம்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியும் இதே வேகத்துடன் இயங்குமாதலால், சக்கரத்தின் கோணத் திசைவேகம்

$$\omega = \frac{v}{\text{ஆரம்}} \text{ ஆகும்.}$$

பொருளின் நிலையாற்றல் இழப்பு, அதன் இயக்க ஆற்றல், சக்கரத்தின் இயக்க ஆற்றல் ஆகியவற்றின் உயர்வுக்குச் சமமாக வேண்டுமாதலால்,

$$m g s = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2}$$

[r என்பது சக்கரத்தின் ஆரம் = 6 செ.மீ.]

$$0.2 \times 9.80 \times 1 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (\tfrac{2}{5})^2 + \tfrac{1}{2} I (\tfrac{2}{5})^2 (\tfrac{100}{6})^2$$

$$\therefore \quad \tfrac{200}{9} I = 1.96 - 0.016$$

$$\therefore \quad I = \frac{9 \times 1.944}{200}$$

எனவே, நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$I = 0.08748 \text{ கிலோ கிராம் - (மீட்டர்)}^2$$

பயிற்சிக் கணக்குகள் (1) 1 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள ஒரு கோளத் திண்மம் ஒரு உராய்வற்ற தளத்தின் மீது 50 செ.மீ./செகண்டு என்ற வேகத்துடன் உருண்டு செல்கிறது. அதன் மொத்த ஆற்றலைக் கணக்கிடுக.

(2) 500 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள ஓர் விசையாட் சுழலியின் ஆரம் 1 மீட்டர். அது 10 சுற்றுக்கள்/செகண்டு என்ற வீதத்தில் சுழன்று கொண்டுள்ளது. அதன் நிறை முழுதும் அதன் விளிம்பில் உள்ளதெனக் கொண்டு அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக. அதன் ஆற்றல் எவ்வளவு?

(3) 1.2 மீட்டர் நீளமும் 0.1 மீட்டர் அகலமும் கொண்ட தகடொன்று ஒரு முனையிலிருந்து d என்ற தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் வழியே செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப் பொறுத்துச் செங்குத்துத் தளத்தில் ஊசலாடுகிறது. அலைவு நேரம் மீச்சிறும மதிப்புடனிருந்தால் d-யின் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

(4) 20 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தட்டு அதன் விளிம்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்துச் செங்குத்துத் தளத்தில் ஊசலாடினால், அதன் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடு.

(5) ஒரு சீரான கோலின் அலைவு நேரம் 2 செகண்டானால், அதன் தொங்கு புள்ளிக்கும் அலைவுப் புள்ளிக்குமிடையேயுள்ள தொலைவைக் கணக்கிடு.

(6) ஒரு மெல்லிய சீரான 1 மீட்டர் நீளமுள்ள கோலொன்று அதன் ஒரு முனையிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. அதன் அலைவு நேரத்தைக் கணக்கிடுக. வேறு எந்தப் புள்ளிகளிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டால் அலைவு நேரம் அதே மதிப்புடையதாக இருக்கும்?

(7) ஒரு சட்ட ஊசல் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து 20 செ மீ. தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து ஊசலாடும் போது அதன் அலைவு நேரம் 1 செகண்டு. அலைவுப் புள்ளியின் தொலைவைக் காண்க.

(8) AB என்ற 100 கிராம் நிறையுள்ள 1.2 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு கோல் A-யைப் பொறுத்து செங்குத்துத் தளத்தில் ஊசலாட இயலும். எந்த இடத்தில் 200 கிராம் நிறையைக் கோலுடன் இணைத்தால் அலைவு நேரம் சிறும மதிப்புடையதாக இருக்கும்.

(9) ஒரு மீட்டர் அளவு கோல் தரையில் ஒரு முனை உள்ளவாறு செங்குத்தாக நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. அது தரையில் தானே விழுந்தால், மேல் முனை தரையை அடையும் போது அதன் வேகம் என்ன? தரையில் உள்ள முனை நழுவுவதில்லை யெனக் கொள்க.

71. கோண உந்த அழிவின்மை (Conservation of angular momentum)

பகுதி 64-ல், $\vec{T}$ என்பது திருப்பு விசையாகவும் (Torque), $\vec{L}$ என்பது கோண உந்தமாகவும் (angular momentum) இருந்தால்

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ எனக் கண்டோம்.

இது போன்ற பல துகள்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியின் கோண உந்தம், அப் பல்வேறு துகள்களின் கோண உந்தங்களின் வெக்டார் கூடுதலுக்குச் சமம். இத்தகைய கோண உந்தம் ஏதேனுமொரு சுட்டுப் புள்ளியைப் (reference point) பொறுத்தவரை காலத்தைப் பொறுத்து மாறலாம். இம் மாற்றம் $\frac{d\vec{L}}{dt}$ பின்வரும் இரு காரணங்களால் தோற்றுவிக்கப் படலாம் :

(1) துகள்களுக்கிடையே உள்ள உள் விசைகளால் (internal forces) தோற்றுவிக்கப்படும் திருப்பு விசைகள் (Torques).

(2) வெளிப்புற விசைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் திருப்பு விசைகள்.

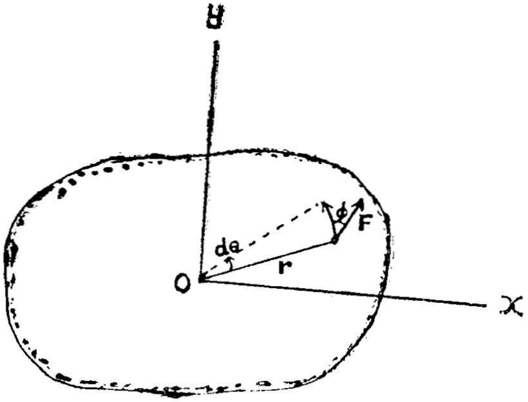
நியூட்டனின் மூன்றும் இயக்க விதி முற்றிலும் பொருந்தக் கூடிய சூழ் நிலையில் ஒரு துகள் மற்றொன்றின் மீது செலுத்தும் செயல்விசை (action), இரண்டாவது துகள் முதல் துகளின் மீது செலுத்தும் எதிர்ச் செயல் விசைக்குச் (reaction) சமமாகவும், எதிர்த் திசையிலும் இருக்கு மாதலால், உள் விசைகளால் தோன்றும் திருப்பு விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும். ஆதலால், வெளிப்புற விசைகளால் தோன்றும் திருப்பு விசைகள் மட்டுமே சுட்டுப் புள்ளியொன்றைப் பொறுத்த கோண உந்தத்தை மாறச் செய்கின்றன எனவே, $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ என எழுதும் போது $\vec{T}$ என்பதை வெளிப்புற விசைகளால் தோன்றும் திருப்பு விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை யென்றே கொள்ளலாம்.

இத்தகைய துகள் தொகுதியில், துகள்கள் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்று எப்போதும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவில் இருந்தால், அந் தொகுதியைத் திண் பொருள் (rigid body) என்கிறோம். திண் பொருட்களின் சுழற்சியில் ஒரு சிறப்பியல்பு என்ன வென்றால், எல்லாத் துகள்களும் ஒரே கோணத் திசைவேகத்துடன் (angular velocity) இயங்குகின்றன.

சுழலச்சுக்கு நேர்க்குத்தான தளத்தில் திண் பொருளின் மீது F_1, F_2 ..... என்ற பல விசைகள் செயல்பட்டால், $d\theta$ என்ற சிறிய கோணச் சுழற்சிக்கு, இவ் விசைகள் புரிகின்ற பணி (work) dw ஆனால்,

$$dw = F_1 \cos\phi_1\, r_1\, d\theta + F_2 \cos\phi_2\, r_2\, d\theta + \ldots\ldots \qquad (71.1)$$

படத்தில் F - என்ற ஒரு விசை மட்டும் காட்டப்பட்டுள்ளது. மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் $F_1 \cos\phi_1\, r_1$, $F_2 \cos\phi_2\, r_2$ முதலியன



படம் 71

முறையே T_1, T_2 என்ற திருப்பு விசைகளைக் குறிப்பன. [படத்தில் P என்ற புள்ளி $\vec{ds}$ தொலைவு நகரும்போது $\vec{F}$ என்ற விசை புரியும் பணி $\vec{F} \cdot \vec{ds}$ ஆகும். $\vec{F} \cdot \vec{ds} = F \cos\phi \, ds$ ஆகும் ஆனால், $ds = r\,d\theta$. எனவே, பணி $= F \cos\phi \, r\, d\theta$. ஆனால் $(F \cos\theta)r$ என்பது O-வைப் பொறுத்து $\vec{F}$ என்ற விசை செலுத்தும் திருப்பு விசை (torqne)-யைக் குறிக்கும். எனவே பணி $= T\, d\theta$ என எழுதலாம்.] எனவே, சமன்பாடு 71.1-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$dw = (T_1 + T_2 + \ldots\ldots)\, d\theta$$

அல்லது $$dw = T\, d\theta. \qquad (71.2)$$

இதில் T என்பது O-வைப் பொறுத்த தொகுபயன் திருப்பு விசை (resultant torque) யாகும்.

ஒரு உண்மையான திண் பொருளினுள் துகள்களின் இயக்கம் இருப்பதில்லை. அவை பொருளுடன் முழுமையாக நகர்கின்றனவே யொழிய ஒவ்வொன்றும் தன்னிச்சையாக நகர்வதில்லை. எனவே, ஒரு உண்மையான திண் பொருளின்உள் ஆற்றல் வீணாகச் செலவழிக்கப்படுவதில்லை. எனவே, அத்தகைய பொருளின் மீது பணி புரியப்படும் வீதம் (rate at which work is done), அதன் இயக்க ஆற்றல் உயரும் வீதத்துக்குச் சமமாக இருக்கும். எனவே, பொருளின் கோணத் திசைவேகம் ω ஆக இருந்தால்,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\, I\,\omega^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, I\, \frac{d}{dt}(\omega^2)$$

$$= I\,\omega\,\frac{d\omega}{dt} = I\,\omega a$$

அதாவது, $\frac{dw}{dt} = I\,\omega a$ (71.3)

ஆனால், சமன்பாடு (71.2) -லிருந்து

$$\frac{dw}{dt} = T\,\frac{d\theta}{dt} = \Gamma\,\omega$$ ஆதலால்,

$$T = I\,a \qquad (71.4)$$

இச் சமன்பாடு $F = ma$ என்ற சமன்பாட்டை யொத்ததாகும்.

இதனை $\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டால்,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\,\vec{a}$$ எனக் கிடைக்கும். (71.5)

$$\frac{d\vec{L}}{t} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{I\,\omega}\right)$$

எனவே, $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ (71.6)

இச்சமன்பாட்டை முன்னரே நாம் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

$\vec{F} = m\,\vec{a}$ என்ற சமன்பாட்டை $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\,\vec{v}) = \frac{d}{dt}\,\vec{p}$ என எழுதினால், m -மாறுபட்டாலும் பொருத்தமாக இருத்தலைப் போலவே, $\vec{T} = \frac{d}{dt}(I\,\vec{\omega})$ என எழுதும்போது I - மாற்றமடைந்தாலும், சமன்பாடு மெய்யாகும்.

கோண உந்த அழிவின்மை விதி (Principle of conservation of angular momentum):

வெளிப்புற விசைகளால் தோற்றுவிக்கப்படும் திருப்பு விசைகளின் தொகுபயன் $\vec{T}$ ஆனால், $\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ எனக் கண்டோம்.

$\vec{T} = 0$ ஆனால், $\frac{d\vec{L}}{dt}$ = ஆகும். எனவே $\vec{L}$ = மாறிலி.

எனவே, வெளிப்புறத் திருப்பு விசைகளின் தொகுபயன் (resultant of external torques) சுழியானால் கோண உந்தம் நிலையானதாகும். இதுவே கோண உந்த அழிவின்மை விதியாகும்.

n துகள்களடங்கிய ஒரு தொகுதியின் ஏதேனுமொரு புள்ளியைப் பொறுத்த கோண உந்தங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots\ldots\ldots + \vec{L}_n \qquad (71.7)$$

என எழுதலாம்.

எனவே கோண உந்தம் மாறிலியாக இருந்தால் 12

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots\ldots + \vec{L}_n = \text{மாறிலி} = \vec{L}_o \qquad (71.8)$$

$\vec{L}_o$ என்பது மாறாத மொத்தக் கோண உந்த வெக்டார். தனித் தனித் துகள்களின் கோண உந்தங்கள் ($\vec{L}_1$, $\vec{L}_2$...முதலியன) மாறுபட்டாலும் வெளிப்புறத் திருப்பு விசைகள் செயல்படாத போது $\vec{L}_o$ மாறாது.

திண் பொருளைப் (rigid body)ப் பொறுத்தவரை, கோண உந்தம் $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ஆதலால், கோண உந்த அழிவின்மை விதியைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$$I\vec{\omega} = \text{மாறிலி} = I_o \vec{\omega}_o \qquad (71.9)$$

எனவே, புறத் திருப்பு விசைகள் இல்லாதபோது ($I\vec{\omega}$)-வின் மதிப்புத் திசையிலும், எண் மதிப்பிலும் மாறக் கூடாது. ஒரு பொருள் சுழலும் போது, ஏதேனுமொரு அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து நிறைப் பங்கீட்டை (distribution of mass) மாற்றி

யமைக்க இயலுமாதலால், I மாறலாம். இவ்வாறு நிகழ்ந்தால், $\vec{I}\omega$ மாறாத மதிப்புடன் அதாவது தொடக்க நிலையிலிருந்த ($I_0 \vec{\omega}_0$) என்ற மதிப்புடன் இருக்க வேண்டுமாதலால், $\vec{\omega}$ தகுந்தவாறு மாற வேண்டும்.

எம்பி நீரில் கரணமடித்துக் குதிக்கும் நீச்சல்காரர்கள், கழைக் கூத்தாடிகள், சுழன்று நாட்டியமாடுவோர், பனிக்கட்டியில் சறுக்கி விளையாடுவோர் ஆகியோர் தாங்கள் சுழலும் வேகத்தையும், செல்லும் திசையையும் மாற்றிக் கொள்ள மேற்கண்ட தத்துவத்தைப் பயன்படுத்திக் கொள்கின்றனர். கோண உந்தம் மாறாதபோது I மாறினால் $\vec{\omega}$ மாறும். I, துகள்களின் தொலைவின் இரு மடியைப் பொறுத்த தாகையால், கை, கால்களை நீட்டிக் குறுக்குவதன் மூலம் அதன் மதிப்பை மாற்றிக் கொள்ள இயலும். இதன் விளைவாக அவர்களின் சுழற்சி வேகம் $\vec{\omega}$ மாறும். இவ்வாறு உடலைக் குறுக்குவதன் மூலம் $\vec{\omega}$-வைத் தக்கவாறு மாற்றிக் கொள்வதால் தான், பூனை எப்போதும் மேலிருந்து கீழே விழும்போது, அல்லது நாம் அதனைச் சற்று மேலே தூக்கித் தரையில் போடும்போது, எப்படிக் கீழே விழுந்தாலும், நான்கு கால்களையும் தரையிலூன்றி நிற்கும். இதே போல் சைக்கிளில் கையை விட்டு விட்டு ஓட்டுபவர், தனது உடலைத் தகுந்தவாறு வளைத்து, செல்லுகின்ற திசையை மாற்றிக் கொள்ள இயலும்.

பொருட்களைத் துகள்களாகக் கருதக் கூடிய இயக்கங்களுக் கெல்லாம் நாம் கூறியுள்ள விதத்தில் கோண உந்த அழிவின்மை விதி பொருந்துவதாகும். ஒரு தொகுதியில் உள்ள தனித்தனிப் பொருட்களும் சுழற்சி இயக்கம் உடையவைகளாக இருந்தாலும் கோண உந்த அழிவின்மை விதி பொருந்தும். ஆனால், இத்தகைய தனித்தனிப் பொருட்களின் சுழற்சியைப் பொறுத்த கோண உந்தங் களையும் கணக்கில் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டும். இதனால் தான் நியூட்டன் எந்திரவியல் (Newtonian Mechanics) பொருந்தாத சிற்சில இடங்களிலும் (அணுக்கரு, அணு பௌதிகம் முதலியவற்றில்) கோண உந்த அழிவின்மை விதி பொருந்துவதாக உள்ளது. இவ் விதியைப் பெற நியூட்டன் மூன்றாம் இயக்க விதியை நாம் பயன் படுத்தியிருந்த போதிலும், கோண உந்த அழிவின்மை என்பது நியூட்டன் விதிகளைவிட மிக அடிப்படையான தொரு விதியாகும்.

அணு, அணுக்கரு பௌதிக வியல்களில் (atomic and nuclear physics) அடிப்படைத் துகள்கள் (elementary particles) (எல்க்ட்

ரான், புரோட்டான், நியூட்ரான் போன்றவை) தற்சுழற்சி (Spin) இயக்கங்களைக் கொண்டவையாதலால், அவைகளுக்குத் தற்சுழற்சிக் கோண உந்தங்கள் (Spin angular momentum) உண்டு. ஆனால், இத்தகைய கோண உந்தங்கள் அடிப்படைத் துகள்களைப் பொறுத்தவரை தொடர்ச்சியான (Continuous) மதிப்புக்களைப் பெற்றிருக்க இயலாது. அவைகள் குவாண்டம் (quantum) நிபந்தனைகளுக் குட்பட்டவையாதலால், அவைகள் குறிப்பிட்ட, தொடர்ச்சியற்ற (definite and discrete) மதிப்புக்களையே பெற்றிருக்க இயலும். எனவே, அத்தகைய அமைப்புக்களின் ஆய்வில், கோண உந்தம் பெருமளவில் பயனுள்ள தத்துவமாகும்.

மேலும், ஞாயிற்றுக் குடும்பத்தின் (solar system) தோற்றம், பெரிய விண் மீன்களின் சுருக்கம் (Contraction), மற்றும் பல வானியல் நிகழ்வுகளின் விளக்கங்கள், ஆகியவற்றிலும் கோண உந்த அழிவின்மை விதி பெருமளவில் பயனுள்ளதாக இருக்கிறது.

72. பம்பரச் சுழற்சி (rotation of a Top)

சுழலுகின்ற பம்பரம் புவியீர்ப்பு விசையை எதிர்த்து நிற்கக் காரணம் என்ன? சுழற்சிவேகம் அதிகமாக உள்ளபோது புவியீர்ப்பையே உணராத வகையில் அது சுழல்வதேன்? உறங்கும் பம்பரம் (Sleeping Top) என்றால் என்ன? இக் கேள்விகளுக்கான பதில்களை பம்பர இயக்கத்தின் தன்மைகளை ஆராய்வதன் மூலம் காண முயல்வோம்.

நமது வசதிக்காக, பம்பரம் என்பதைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

ஒரு சமச்சீரமையுள்ள (symmetrical) பொருள் ஒரு புள்ளியை நிலையாகக் கொண்டே அச்சுக் கோடொன்றினைப் பொறுத்துச் சுழலுமாயின், அதனைப் பம்பரம் என்கிறோம்.

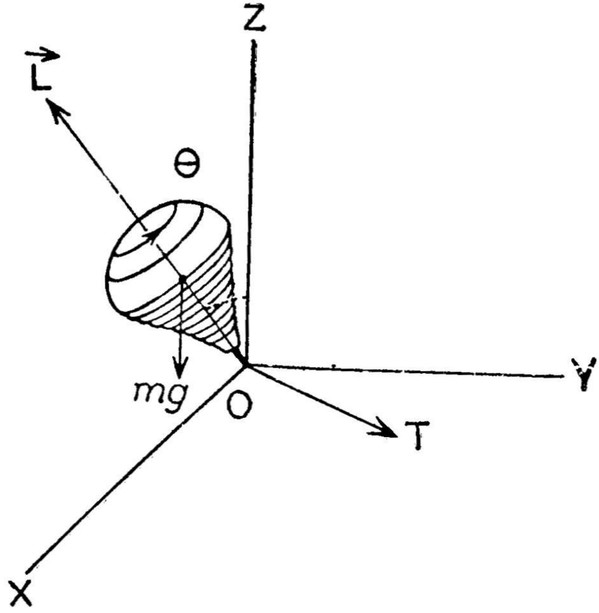
அப்புள்ளி அப்பொருளின் புவியீர்ப்பு மையமாக இருந்தால் அதனை ஜைராஸ்டாட் (Gyrostat) என்கிறோம். அல்லது அப்புள்ளியையும் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டினை அச்சுக் கோடாகக் கொண்டு சுழன்றால், அதனை ஜைராஸ்கோப் (Gyroscope) என்கிறோம்.

அச்சுச் சுழற்சி (Precession) : கிடைத்தளத்தில், செங்குத்தான அச்சுக் கோடொன்றைப் பொறுத்துச் சுழலுமாறு அமைக்கப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் மீது நிற்கும் ஒரு சிறுவனிடம் கிடைத்தள அச்சுக்கோடொன்றைப் பொறுத்துச் சுழலும் மற்றொரு சக்கரத்தைக் கொடுத்தோமானால், சிறுவன் நிற்கும் சக்கரம் சுழலத் தொடங்கும். இதனால் கிடைத்தள அச்சுக் கோடும் (கையில் உள்ள சக்கரத்தின் அச்சுக் கோடு), செங்குத்து அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்துச் சுழலத்

தொடங்கும். இத்தகைய அச்சுக் கோட்டைச் சுழற்சி **அச்சுச் சுழற்சி** (precession) எனப்படும்.

ஒரு நிலையான புள்ளியின் வழியே செல்லும் அச்சுக் கோடொன்றைப் பொறுத்துச் சுழலும் பம்பரத்தின் இயக்கத்தைக் கண்ணுற்றால், அந்த அச்சுக் கோடு, அப்புள்ளியின் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டைப் பொறுத்துச் சுழல்வதைக் காணலாம். (இதனைச் சாய்ந்தாடும் பம்பரம் எனக் கூறுவதுண்டு.) இவ்வச்சுச் சுழற்சியின் கோணத் திசைவேகத்தை அச்சுச் சுழற்சித் திசை வேகம் (precessional velocity) ω_p என்கிறோம். சுழற்சி அச்சுக் கோட்டைப் (axis of rotation) பொறுத்துப் பம்பரத்தின் கோணத் திசைவேகத்துடன் ஒப்பிடுகையில், இது மிகக் குறைவானதாக இருந்தால், இந்த அச்சுச் சுழற்சித் திசைவேகம் ω_p, பம்பரத்தின் கோண உந்தத்தின் மதிப்பிற்கு எதிர் விகிதத்திலிருக்குமென காட்டலாம்.

$\vec{L}$ என்பது பம்பரத்தின் கோண உந்தத்தையும், $\vec{r}$ என்பது நிறை மையத்தின் நிலை (position of Centre of mass) யையும் குறிக்கும் வெக்டார்களாகவும், O என்பது நிலையான புள்ளியாகவும், சுழற்சி அச்சுக் கோடு (axis of rotation) O_z என்ற செங்குத்துக்



படம் 72

கோட்டுடன் θ கோணத்தை உண்டாக்குவதாகவும் கொள்வோம் O-வில் செயல்படும் மேல் நோக்கிய விசைக்கு, O-வைப் பொறுத்த திருப்புத்திறன் சுழியாகும். எனவே திருப்பு விசை (troque) mg என்ற நிறை மையம் அல்லது புவியீர்ப்பு மையத்தில் செயல்படும் விசையைப் பொருத்ததேயாகும். [நாம் இதுவரை புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity) எனக் குறிப்பிட்டவைகளெல்லாம் நிறை மையங்களேயே (Centres of mass) என்பதைப் பின்னர் காண்போம். புவியீர்ப்பு முடுக்கம் நிலையான மதிப்புடன் இருந்தால் (எண் மதிப்பிலும், திசையிலும்) புவியீர்ப்பு மையமும், நிறை மையமும் ஒன்றேயாகும்.] எனவே,

$$\vec{T} = \vec{r} \times mg \tag{72.1}$$

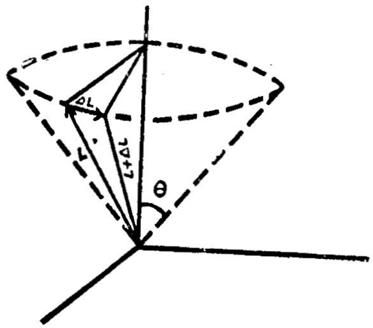
இத் திருப்பு விசையால் Δt நேரத்தில் கோண உந்தம் $\vec{L}$-ல் உண்டாகும் மாற்றம் $\Delta\vec{L}$ ஆனால்,

$$\Delta\vec{L} = \vec{T}\,\Delta t \quad \text{ஆகும்.} \tag{72.2}$$

$$\left(\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \text{ என்பதை நினைவில் கொள்க.}\right)$$

$\vec{T}$ என்ற திருப்பு விசையின் திசையும், கோண உந்த மாறுபாடு $\Delta\vec{L}$-ன் திசையும், சுழற்சி அச்சுக் கோட்டுக்கு (axis of rotation) நேர்குத்தான திசையாகும்.

Δt-நேரம் கடந்த பின்னர் பம்பரத்தின் கோண உந்தம் $\vec{L}+\Delta\vec{L}$ ஆகும். $\Delta\vec{L}$, $\vec{L}$-க்கு நேர்குத்தாக உள்ளதாலும், மிகச்



படம் 73

சிறியதாகையாலும், $\vec{L} + \triangle\vec{L}, \vec{L}$ ஆகியவற்றின் எண் மதிப்புக் கள் சமமாகும். ஆனால், திசைகள் வெவ்வேறாக உள்ளன.

எனவே காலம் செல்லச் செல்லக் கோண உந்த வெக்டார் $\vec{L}$-ன் முனை ஒரு கிடைத்தள வட்டத்தில் (Horizontal Circle) இயங்குகிறது. கோண உந்த வெக்டார் $\vec{L}$, பம்பரத்தின் அச்சுக் கோட்டில் உள்ளதால், அச்சுக்கோடு O-வைப் பொறுத்துச் சுழல் கிறது. இதுவே அச்சுக் கோட்டுச் சுழற்சி (Precession) ஆகும்.

இவ் வச்சுக் கோட்டுச் சுழற்சியின் கோணத் திசைவேகம்

$$\omega_p = \frac{\triangle\phi}{\triangle t} \tag{72.3}$$

($\triangle\phi$ என்பது $\triangle\vec{L}$ கிடைத்தள வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம்.)

ஆனால், $\triangle\vec{L} < \angle \vec{L}$ ஆதலால்,

$$\triangle\phi = \frac{\triangle L}{L \sin\theta}$$

$$= \frac{T\,\triangle t}{L \sin\theta}$$

மேலும் $T = m\,g\,r\sin\theta$ ஆதலால்

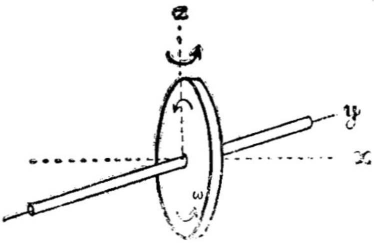
$$\triangle\phi = \frac{m\,g\,r}{L}\,\triangle t \tag{72.4}$$

எனவே $$\omega_p = \frac{mg\,r}{L} \tag{72.5}$$

இது θ-வைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை. ஆனால், கோண உந்தத்துக்கு எதிர் விகிதத்தில் உள்ளது. கோண உந்தம் $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ ஆதலால், சுழற்சித் திசைவேகம் ω அதிகமானால், ω_p குறையு மென்பது தெளிவு. ω மிகமிக அதிகமாக இருந்தால், ω_p மிகமிகக் குறைந்து இருக்கும்.

73. ஜைராஸ்டாட் (Gyrostat)

பெரும நிலைமத் திருப்புத் திறனுடையதும், நிறை மையத்தின் வழியே செல்லும் அச்சைப் பொறுத்து மிக வேகமாகச் சுழலக்



படம் 74

கூடியதுமான ஒரு சக்கரம் அல்லது விசையாட் சுழலி, அதன் சக்கரமும் அச்சும், அச்சுக்கு நேர்க்குத்தான ஏதேனுமொரு அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து முழுமையாகச் சுழலக் கூடிய விதத்தில் அமைக்கப்பட்டிருந்தால் அதனை ஜைராஸ்டாட் (Gyrostat) என்கிறோம்.

சக்கரத்தின் மீது ஒரு திருப்பு விசை T_1, அதன் அச்சுக்கோடு சக்கரம் சுற்றுகின்ற அச்சுக் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்தாக உள்ளவாறு செயல்பட்டால், ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தான மூன்றுவது அச்சு கோட்டைப் பொறுத்த அச்சுச் சுழற்சி (Precession) இருக்குமென முன்னர் கண்டோம். [சமன்பாடு (72.5)-ல் mgr என்பது திருப்பு விசையைக் குறிக்கிறது.]

எனவே, அச்சுச் சுழற்சித் திசைவேகம்

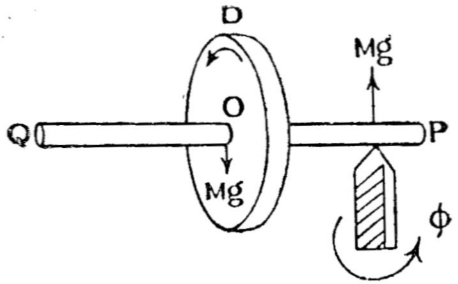
$$\omega_p = \frac{T_1}{L} = \frac{T_1}{I\omega} \qquad (73.1)$$

எனவே ω_p (i) நிலைமத் திருப்புத்திறன் I-க்கு எதிர் விகிதத்திலும் (ii) சக்கரத்தின் கோணத் திசைவேகத்துக்கு எதிர் விகிதத்திலும் இருக்கும்.

74. ஜைராஸ்கோப் (Gyroscope)

அச்சுச் சுழற்சிக் குட்படுத்தப்படும் பெரும்பாலான பொருட்கள் பொதுவாகப் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டில் இல்லாத புள்ளியொன்றில் தாங்கப்படுகின்றன. அத்தகையதொரு அமைப்பை ஜைராஸ்கோப் (Gyroscope) அல்லது பம்பரம் என்கிறோம்.

இத்தகைய அமைப்பில் புவியீர்ப்பால் தோன்றும் திருப்பு விசை செயல்படுகிறது. இதன் காரணமாகப் புவியீர்ப்பு மையம் கீழே வர முயற்சிக்கும். ஆனால், தனது அச்சைப் பொறுத்துச்



படம் 75

சுழன்று கொண்டுள்ள ஒரு பொருளுக்கு இத் திருப்பு விசை, அச்சுச் சுழற்சியைத் (precession) தருவதற்குப் பயன்படுகிறது. இவ்வாறு புவியீர்ப்பால் தோன்றும் திருப்பு விசை T_2 என்றால், அதனால் உண்டாகும் அச்சுச் சுழற்சித் திசைவேகம் (precessional angular velocity) ϕ எனக் கொண்டால்

$$\phi = \frac{T_2}{I\,\omega} \tag{74.1}$$

என எழுதலாம்.

படத்தில் உள்ளது போல் PO Q என்ற அச்சை (axle) ப் பொறுத்துச் சுழன்று கொண்டிருக்கும் பளுவான சக்கரத்தின் அச்சு P என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாகத் தாங்கப் பட்டிருந்தால்,

$$T_2 = mg \, . \, OP = mg\,r$$

எனவே $$\phi = \frac{mg\,r}{I\,\omega} \tag{74.2}$$

ஆனால் $I = m\,k^2$ ஆதலால்

$$\phi = \frac{g\,r}{k^2\omega} \tag{74.3}$$

எனவே அச்சுச் சுழற்சிக்கான சுழற்சி அலைவு நேரம் (Period) t ஆனால்

$$t = \frac{2\pi}{\phi} = 2\pi \; \frac{k^2\omega}{g\,r} \tag{74.4}$$

சக்கரத்தின் சுழற்சி வேகம் குறையாதவரை இத்தகைய புவியீர்ப்பால் தொடங்கப்பட்ட அச்சுச் சுழற்சி நிகழ்ந்து கொண்டே இருக்கும்.

இதைவிட அதிகமாக அச்சுச் சுழற்சித் திசைவேகம் O-வைப் மேல் நோக்கி எழச் செய்யும். வேகம் குறையும்போது O-கீழிறங்

கும். இவ்வாறு சீரான அச்சுச் சுழற்சியுடன் மேல் நோக்கியும், கீழிறங்கியும் உண்டாகும் அலைவுகளைச் சுழலலைவுகள் என்றும், இத்தகைய இயக்கத்தைச் சுழலலைவியக்கம் (nutation) எனவும் கூறுவோம்.

இப்போது ஒரு மைய விலக்கு விசை POQ என்ற திசையில் செயல்படுவதாகக் கொள்வோம். QOP-என்ற திசையில் மைய நோக்கு விசையின் (Centripetal force) காரணமாக P-யில் உராய்வு விசை அதிகரிக்கும். இவற்றின் திசைகள் வெவ்வேறு கோடுகளில் இருந்தால் மேலுமொரு திருப்பு விசை T_3 செயல்படும். இதனை மைய விலக்குத் திருப்பு விசை (Centrifugal troque) என்போம்.

அச்சுச் சுழற்சியிலுள்ள எந்தப் பொருளையும் அச்சுச் சுழற்சி மையத்திலிருந்து விலகிச் செல்லாதிருக்குமாறு செய்ய, மைய விலக்குத் திருப்பு விசைக்கு எதிர்த்திசையில் மைய நோக்குத் திருப்பு விசை (Centrifugal torque) செயல்படவேண்டும். இந்த மைய நோக்குத் திருப்பு விசை புவியீர்ப்புத் திருப்பு விசையின் ஒரு பகுதியால் த்ரப்படும். மறு பகுதி அச்சுச் சுழற்சிக்கான திருப்பு விசையைக் கொடுக்கும்.

எனவே, $$T_2 - T_3 = T_1 \qquad (74.5)$$
என எழுதலாம்.

75. நிறை மையம் (Centre of mass)

ஒரு பொருள் நேர்ப்பெயர்ச்சி இயக்கத்தில் (translational motion) உள்ளபோது, அதிலுள்ள ஒவ்வொரு துகளும் ஒரே மாதிரியான இடப்பெயர்ச்சி (displacement) யுறுவதால், ஏதேனுமொரு துகளின் இயக்கம், அப்பொருளின் இயக்கத்தை விளக்கும். இவ்வாறு நேர்ப் பெயர்ச்சி இயக்கத்திலுள்ள பொருள், அதிர்வியக்கமோ அல்லது சுழற்சி இயக்கமோ (vibrational or rotational motion) கொண்டிருப்பினும், நிறை மையம் (Centre of mass) என்ற புள்ளியின் இயக்கத்தைக் கூறுவதன் மூலம் பொருளின் இயக்கத்தை உணரலாம். பல துகள்களடங்கிய துகள் தொகுதியின் (system of particles) இயக்கத்தையும் நிறை மையத்தின் இயக்கத்தின் மூலம் அறியலாம்.

நிறை மையமென்பது, எந்தப் புள்ளியைப் பொறுத்துத் துகள் தொகுதியின் நிறைத் திருப்புத்திறன் சுழியாகிறதோ, அந்தப் புள்ளியைக் குறிக்கும்.

முதலில் இரு துகள்களேயுள்ள ஒரு தொகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். அவற்றின் நிறைகள் m_1, m_2 எனவும், ஏதேனு

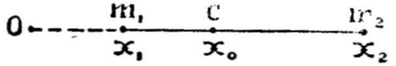
மொரு புள்ளியிலிருந்து அவற்றின் தொலைவுகள் முறையே x_1, x_2 எனவும் கொள்வோம். x_0 என்ற தொலைவில் உள்ளதும்

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (75.1)$$

என்ற வரையறைப்படி அமைந்ததுமான C என்ற ஒரு புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம்.

$$x_0 (m_1 + m_2) = m_1 x_1 + m_2 x_2 \qquad (75.2)$$

ஆதலால், மொத்த நிறையை C-யின் தொலைவினால் பெருக்கினால் கிடைக்கும் பெருக்கற் பலன், தனித் தனியாக நிறைகளை



படம் 76

அவற்றின் தொலைவுகளுடன் பெருக்கினால் வரும் பெருக்கற் பலன்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்.

இப்போது C என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து m_1-ன் தொலைவு $(x_0 - x_1)$ ஆகும். அதேபோல் m_2-ன் தொலைவு $(x_2 - x_0)$ ஆகும். எனவே, C-யைப் பொறுத்துத் தொகுதியின் திருப்புத்திறன்

$$m_1 (x_0 - x_1) - m_2 (x_2 - x_0)$$

$$= -m_1 x_1 - m_2 x_2 + (m_1 + m_2) x_0 \qquad (75.3)$$

C-யின் வரையறைப்படி (75.1) இது சுழியாகும். எனவே C என்ற புள்ளி தொகுதியின் நிறை மையமாகும். இவ்வரையறைப் படி ஒரு துகள் தொகுதிக்கு ஒரே ஒரு நிறை மையம் தான் இருக்க இயலும்.

x-அச்சுக் கோட்டில் பல துகள்களைக் கொண்ட ஒரு துகட் தொகுதியின் நிறை மையம் x_0 தொலைவிலிருந்தால்

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n} \qquad (75.4)$$

ஆனால், $(m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n)$ = துகட் தொகுதியின் நிறை M ஆதலால்,

$$M x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots + m_n x_n \qquad (75.5)$$

x-அச்சுக் கோட்டில் மட்டு மின்றிச் சூழலில் (Space) பரவுயுள்ள துகள்களைக் கொண்ட துகட் தொகுதியின் நிறை மையம் (x_0, y_0, z_0) என்ற ஆயக் கூறுகளால் குறிக்கப்பட்டால்,

$$x_0 = \frac{\sum mx}{\sum m}; \quad y_0 = \frac{\sum my}{\sum m}; \quad z_0 = \frac{\sum mz}{\sum m} \qquad (57.6)$$

நிறை மையம் துகள்களின் நிறைகளையும் அவற்றின் இடைத் தூரங்களையும் மட்டுமே பொறுத்ததாகும். பயன்படுத்தப்படும் ஆயக் கோட்டுத் தொகுதியை (axes of Co-ordinates)ப் பொறுத்து மாறுவதில்லை.

76. திண்பொருட்களின் நிறை மையம் (Centres of mass of rigid bodies).

திண் பொருள் (rigid body) என்பதைத் துகள்கள் மிக நெருக்கமாக அடைபட்டிருக்கக் கூடிய ஒரு துகள் தொகுதியே யாகும். எனவே திண் பொருளுக்கும் நிறை மையம் காண இயலும். துகட்கள் மிகப் பெருமளவில், மிகக் குறுகிய இடத்துள் அடைபட்டுள்ளனவாதலால், அதனை நிறையானது தொடர்ச்சியாகப் பகிர்ந்தளிக்கப்பட்ட ஓர் அமைப்பு (continuous distribution of mass) எனக் கொள்ளலாம். இத்தகைய பொருளின் நிறை மையத்தைப் பின் வருமாறு காண்போம்: அப் பொருளை dm நிறையுள்ள சிறு சிறு துகள்களாகப் (பகுதிகளாகப்) பிரிக்கிறோம். ஏதேனுமொரு பகுதியின் ஆயங்கள் (x, y, z) எனக் கொண்டால், பொருளின் நிறை மையம் (x_0, y_0, z_0) பின்வரும் சமன்பாடுகளால் தரப்படும்:

$$x_0 = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{1}{m} \int x\, dm \qquad (76.1)$$

$$y_0 = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y\, dm \qquad (76.2)$$

$$z_0 = \frac{\int z\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z\, dm \qquad (76.3)$$

$M = \int dm$ என்பது திண் பொருளின் மொத்த நிறையைக் குறிக்கும். வெக்டார் சமன்பாடாக எழுதினால், நிறை மையத்தின் இடங் குறிக்கும் வெக்டார் (position vector)

$$\vec{r}_0 = \frac{\int r\, dm}{\int dm} \qquad (76.4)$$

என எழுதலாம்.

பௌதிகத்தில் நாம் பெரும்பாலும் ஒரு புள்ளி, ஒரு கோடு அல்லது ஒரு தளத்தைப் பொறுத்துச் சீரமைவு கொண்ட (symmetric) பொருட்களைப்பற்றிக் கற்போம். நிறை மையம் அந்தச் சீரமைவுப் புள்ளியிலோ, சீரமைவுக் கோட்டிலோ, அல்லது சீரமைவுத் தளத்திலோ தான் இருக்கும். காட்டாக, ஒரு கோளத்தின் நிறை மையம் அதன் மையப் புள்ளியே யாகும். ஒரு கூம்பின் நிறை மையம், அல்லது ஒரு உருளையின் நிறை மையம் அதன் அச்சுக் கோட்டில் தான் இருக்கும்.

77. நிறை மையத்தின் இயக்கம்: (Motion of centre of mass),

நிறை மையத்தின் தரையறைப்படி

$$M x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots m_n x_n \qquad (77.1)$$

காலத்தைப் பொறுத்து இதனை இரு முறை வேறு படுத்தினல்

$$M \frac{d^2 x_0}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \ldots\ldots + m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

எனக் கிடைக்கும்.

இதே போன்று $M \frac{d^2 y_0}{dt^2}$, $M \frac{d^2 z_0}{dt^2}$ ஆகியவற்றையும் எழுதி வெக்டார் வடிவில் ஒரே சமன்பாடாக

$$M.\vec{a} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots\ldots + \vec{F_n} = \vec{F} \qquad (77.2)$$

என எழுதலாம்.

இதில்,

$$\vec{a} = \frac{d^2 x_0}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y_0}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z_0}{dt^2} \vec{k} \qquad (77.3)$$

என்பது நிறை மையத்தின் முடுக்கத்தையும், $\vec{F}$ என்பது எல்லாத் துகட்களின் மீதும் செயல்படுகின்ற $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$,............$\vec{F_n}$ என்ற தனித்தனி விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகையையும் குறிக்கின்றன.

எனவே நிறை மையம், அப் புள்ளியில் முழு நிறையும் குவிந்துள்ளபோது எல்லாப் புறவிசைகளும் அதே புள்ளியில் செயல் பட்டால் எவ்வாறு இயங்குமோ, அதே முறையில் இயங்கும்.

இதுவரை வந்த பகுதிகளில் பெரும்பாலும் புவியீர்ப்பு மையமென (Centre of gravity) நாம் குறிப்பிட்டதெல்லாம் நிறை மையமே யாகும். புற விசை புவியீர்ப்பு விசையாக இருப்பின் நிறை மையம், புவியீர்ப்பு மையமே யாகும். ஒரு பொருளின் துகள்களின் மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் திசையும், எண்மதிப்பும் மாருதவரை இது பொருந்தும். ஒரே பொருளின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பு வெவ் வேருக இருந்தால் புவியீர்ப்பு மையம் நிறை மையமாக இருக்காது.

78. இடைச் செயலுடைய இரு பொருட்களின் இயக்கம் (Motion of two interacting bodies):

நியூட்டனின் மூன்றும் இயக்க விதிக்குட்பட்டு உள்விசைகள் (internal forces) செயல்படுகின்ற இரு பொருட்கள் கொண்ட தொகுதியொன்றின் இயக்கத்தைக் காண்போம்.

அவ்விரு பொருட்களின் நிறைகளா முறையே m_1, m_2 எனவும், அவற்றின் மீது செயல்படுகின்ற வெளிப்புற விசைகள் $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ எனவும் முறையே கொள்வோம். மேலும் ஒன்றின் மீது மற்றொன்று செலுத்தும் உள் விசைகள் முறையே $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ ஆனால், நியூட்டன் மூன்றும் விதிப்படி

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \tag{78.1}$$

$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ என்பன அவ்விரு பொருட்களின் இட வெக்டார்களானல் (position vectors) அவைகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்:

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{f}_1 \tag{78.2}$$

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{f}_2 \tag{78.3}$$

இப்போது $\vec{R}$, $\vec{r}$ என்ற ஆயங்களைப் பின் வரும் சமன்பாடுகளால் வரையறுப்போம்:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}^2}{m_1 + m_2} \tag{78.4}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{78.5}$$

சமன்பாடு (78.4), (78.5) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$(m_1 + m_2)\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

$$m_2 \vec{r} = m_2 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2$$

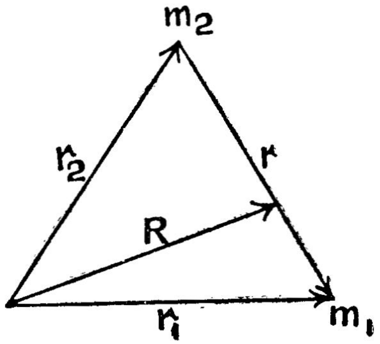
எனவே, $(m_1 + m_2)\vec{R} + m_2 \vec{r} = (m_1 + m_2)\vec{r}_1$

அல்லது $\vec{r}_1 = R + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$ (78.6)

அதேபோல், $\vec{r}_2 = R - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$ (78.7)

எனவும் பெறலாம்.

மேலும் சமன்பாடு (78.4)-ஐச் சமன்பாடு (75.1)-உடன் ஒப்பிட்டால், $\vec{R}$ என்பது நிறை மையத்தையும் (Centre of mass), $\vec{r}$



படம் 77

என்பது m_2 -வைப் பொறுத்து m_1 -ன் சார்பு ஆயத்தையும் (relative Co-ordinate) குறிக்கின்ற வெக்டார்களாகும்.

இப்போது சமன்பாடு (78.4) -லிருந்து

$$(m_1+m_2) \frac{d_2\vec{R}}{dt_2} = m_1 \frac{d_2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \qquad (78.8)$$

மேலும், சமன்பாடுகள் (78.2), (78.3), (78.1) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு (78.8)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$(m_1+m_2) \frac{d_2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad (78.9)$$

இது $\vec{R}$ -ன் இயக்கத்துக்கான, அதாவது நிறை மையத்தின் இயக்கத்துக்கான சமன்பாடாகும்.

மேலும் சமன்பாடு (78.2), சமன்பாடு (78.3) ஆகியவற்றி லிருந்து

$$m_1 m \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = m_2 \vec{F}_1 + m_2 \vec{f}_1$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = m_1 \vec{F}_2 + m_1 \vec{f}_2$$

$$\therefore \quad m_1 m_2 \left[\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \right]$$

$$= m_2 F_1 - m_1 F_2 + m_2 f_1 - m_1 f_2 \quad (78.10)$$

சமன்பாடு (78.5) -லிருந்து

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$

மற்றும் $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ எனவே, சமன்பாடு (78.10) -ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்:

$$(m_1 m_2) \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_2 \vec{F}_1 - m_1 \vec{F}_2 + (m_1 + m_2) \vec{f}_1$$

அல்லது, $$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left[\frac{\vec{F}_1}{m_1} - \frac{\vec{F}^2}{m^2} \right] + \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \vec{f}_1$$

இதுவே, $\vec{r}$ -ன் இயக்கச் சமன்பாடு (78.11)

இப்போது, $$\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}_2}{m_2} \quad (78.12)$$

என்று கருதுவோமானல், சமன்பாடு (78.11) -ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்:

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = f_1 \quad (78.13)$$

பொருளின் மொத்த நிறை

$$M = m_1 + m_2 \tag{78.14}$$

எனவும்,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{78.15}$$

எனவும் கொண்டால், சமன்பாடுகள் (78.9), (7813) ஆகியவை பின்வரும் வடிவங்களைப் பெறுகின்றன:

$$M \frac{d^2 \vec{}}{dt^2} = \vec{F} \tag{78.16}$$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{d_t^2} = \vec{f_1} \tag{78.17}$$

இதில், $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ என்பது தொகுதியின் பொருட்களின் மீது செயல்படும் வெளிப்புற விசைகளின் வெக்டார் கூடுதலாகும். இவ்விரு சமன்பாடுகளும் [(78.16), (78.17) ஆகியவை] தனிப்பட்ட துகள்களின் இயக்கச் சமன்பாடுகளை யொத்திருக்கின்றன.

சமன்பாடு (79.16), நிறை மையத்தின் இயக்கத்தைக் குறிக்கிறது. சமன்பாடு (78.17) μ என்ற நிறையுடையதும், f_1 என்ற இரண்டாவது பொருள் முதல் பொருளின் மீது செலுத்துகின்ற விசை செயல்படுவதுமானதொரு துகளின் இயக்கச் சமன்பாடாகும். எனவே, இரண்டாவது துகளைப் பொறுத்தவரை இரண்டாம் துகள் நிலையானதாகவும், முதல் துகள் μ என்ற நிறை கொண்டதாகவும் தோன்றுகிறது. ஒரு துகளின் நிறையை மற்றொன்றின் நிறையுடன் ஒப்பிடுகையில் மிகமிகப் பெரியதாகவோ அல்லது மிகமிகச் சிறியதாகவோ இருந்தால், μ சிறிய துகளின் நிறையை விடச் சற்றுச் சிறியதாக இருக்கும். $\mu = \frac{m_1 m_1}{m_1 + m_2}$ என்பதைச் சுருக்கநிறை (Reduced mass) என்கிறோம். இரு துகள்களும் சமமான m என்ற நிறை கொண்டவைகளானால், $\mu = \frac{m}{2}$ ஆகும்.

எனவே, இடைச் செயலுடைய (ஒன்றின் மீது மற்றொன்று எதிர் விகித இருமடி விதிப்படி ஈர்ப்பு விசை அல்லது விலக்கு விசை செயல்படுகின்ற) எந்த இரு பொருட்களின் இயக்கங்களையும் மேற்கூறியவாறு ஒரு பொருள் இயக்கமாகக் கருதி விளக்கம் பெற இயலும். ஆனால், வெளிப்புற விசைகள் இல்லாமல் இருக்க

வேண்டும்; அல்லது, சமன்பாடு (78.12) -ன்படி அவைகளின் நிறைக்கு நேர் விகிதத்திலுள்ள விசைகள் அவற்றின் மீது செயல்பட வேண்டும்.

சமன்பாடு (78.12), வெளிப்புற விசைகள் ஈர்ப்பு விசைகளாக (gravitational force) உள்ளபோது, அவ் விசைகளைச் செலுத்தும் பொருட்கள், m_1 -லிருந்து m_2 -வின் தொலைவை விட மிகமிக அதிகத் தொலைவில் உள்ளபோது பொருந்தும். காட்டாக, திங்கள் புவிக் கருகிலும், ஆனால், இரண்டும் ஞாயிறு போன்ற மற்ற கோள் களிலிருந்து மிகத் தொலைவிலும் உள்ளனவாதலால், திங்கள், புவி ஆகியவற்றின் இயக்கத்தை இம் முறையால் பெருமளவில் அறிய முடியும். அணுவில் உள்ள துகள்களில் (atomic particles) அவை களின் மின்னூட்டங்களுக்கு நேர் விகிதத்திலுள்ள மின் விசைகள் செயல்படுதலால், சமன்பாடு (78.12) வெளிப்புற விசைகள் இல்லாதபோது மட்டுமே பொருந்தும். மேலும், சமன்பாடுகள் (78.2), (78.3) ஆகியவை அணுவில் உள்ள துகள்களுக்கு அவ்வளவு சரியாகப் பொருந்துவதில்லை. எனினும், $\vec{R}$, $\vec{r}$ ஆகிய வற்றைப் பயன்படுத்தி, இரு பொருட்களின் இயக்கத்தை ஒரு இயக்கமாக மாற்றி, குவாண்டம் இயக்கவியலின் (quantum mechanics) மூலமாக இதே முறையில் அணுவின் துகள்களின் இயக்கங்களைப் பற்றி அறிய இயலும்.

79. இடைச் செயலுடைய இரு பொருட்களின் இயக்க ஆற்றல் முதலியன (Knietic energy etc. of two interacting bodies)

இடைச் செயலுடைய இரு பொருட்களின் இயக்கத்தை இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தது போலவே, அத் தொகுதியின் இயக்க ஆற்றலையும் இரு பகுதிகளாக்கிக் காட்டலாம். m_1, m_2, M, μ ஆகியவற்றின் திசை வேகங்கள் முறையே $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{V}$, $\vec{v}$ எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு (78.4) -லிருந்து

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{79.1}$$

அதேபோல், சமன்பாடு (78.5) -லிருந்து,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \tag{79.2}$$

மேலும், சமன்பாடுகள் (78.6), (78.7) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \frac{\mu}{m_1}\vec{v} \qquad (79.3)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{V} - \frac{\mu}{m_2}\vec{v} \qquad (79.4)$$

துகட் தொகுதியின் மொத்த இயக்க ஆற்றல்

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 \left(V + \frac{\mu}{m_1} v\right)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(V - \frac{\mu}{m_2} v\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \tfrac{1}{2} \mu^2 v^2 \left[\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2} M V^2 + \tfrac{1}{2} \mu v^2$$

எனவே, $T = \tfrac{1}{2} M V^2 + \tfrac{1}{2} \mu v^2$ (79.5)

இதே போலக் கோண உந்தத்தையும் இரு பகுதிகளாக்கிக் காட்டலாம்.

இரு பொருட்களின் மொத்தக் கோண உந்தம்

$$\vec{L} = m_1 (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2 (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)$$

$$= m_1 \left[\vec{r}_1 \times \left(\vec{V} + \frac{\mu}{m_1}\vec{v}\right)\right] + m_2 \left[\vec{r}_2 \times \left(\vec{V} - \frac{\mu}{m_2}\vec{v}\right)\right]$$

$$= (\vec{r}_1 \times m_1 \vec{V}) + (\vec{r}_2 \times m_2 \vec{V}) + (\vec{r}_1 \times \mu \vec{v}) - (\vec{r}_2 \times \mu \vec{v})$$

$$= \left(\vec{R} + \frac{\mu}{m_1}\vec{r}\right) \times m_1 \vec{V} + \left(\vec{R} - \frac{\mu}{m_2}\vec{r}\right) \times m_2 \vec{V} + \vec{r} \times \mu \vec{v}$$

$$= (m_1 + m_2)(\vec{R} \times \vec{V}) + \mu (\vec{r} \times \vec{v})$$

எனவே, $\vec{L} = M(\vec{R} \times \vec{V}) + \mu(\vec{r} \times \vec{v})$ (79.6)

இரு துகள்களின் மொத்த உந்தம் (momentum)

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_2 + m_2 \vec{v}_2$$

$$= m_1\left(\vec{V} + \frac{\mu}{m_1}\vec{v}\right) + m_2\left(\vec{V} - \frac{\mu}{m_2}\vec{v}\right)$$

$$= (m_1 + m^2)\,\vec{V}$$

எனவே, $\vec{p} = M\vec{V}$ (79.7)

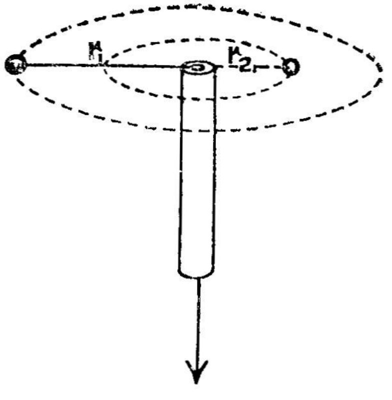
எனவே, மொத்த உந்தந்தைக் குறிப்பிடுகையில் சுருக்க நிறைக்கான $\mu\vec{v}$ என்ற கோவை (expression) இருப்பதில்லை.

80. பயிற்சிகள் (Excersises)

விளக்கக் கணக்கு (1)

ஒரு குழாயின் வழியே செல்லும் மெல்லிய நூலொன்றின் முனையில் m நிறையுள்ள ஒரு சிறு பொருள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. குழாயை ஒரு கையாலும் நூலை மற்றொரு கையாலும் பிடித்தவாறு, துகள் r_1 என்ற ஆரமுள்ள வட்டத்தில் v_1 என்ற வேகத்துடன் சுழலுமாறு செய்யப்படுகிறது. இப்போது நூலை இழுத்து வட்ட ஆரத்தை r_2 ஆகக் குறைத்தால், துகளின் புதிய வேகம் v_2 -வையும் புதிய கோணத் திசை வேகம் ω_2 வையும் கணக்கிடுக.

நூலைக் கீழே இழுக்கும் விசை பொருளின் மீது வட்ட ஆரத்தின் வழியே செயல்படுகிறது. சுழல் மையத்தைப் பொறுத்து



படம் 78

அத்தகைய விசையால் தோன்றும் திருப்பு விசை சுழியாதலால் அத் திசையில் துகளின் கோண உந்தம் மாறுவதில்லை.

எனவே,

$$m\, v_1\, r_1 = m\, v_2\, r_2$$

அல்லது $$v_2 = v_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

r_1, r_2 -வை விடப் பெரியதாகையால் துகளின் வேகம் அதிக மாகியுள்ளது.

மேலும், $v_1 = \omega_1 r_1$; $v_2 = \omega_2 r_2$ ஆதலால்,

$m\, r_1^2\, \omega_1 = m\, r_2^2\, \omega_2$ ஆகும்.

ஆகவே, $\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \omega_1$ ஆகும்.

எனவே, கோணத் திசைவேகம் பெருமளவு உயர்ந்துள்ளது.

விளக்கக் கணக்கு (2): ஒரு செகண்டுக்கு ஒரு முறை சுழலக் கூடிய உராய்வற்ற சுழல் மேடையின் மீது, ஒரு மனிதன் பக்கவாட்டில் நீட்டிய கைகளில் இரு எடைகளுடன் நின்று கொண்டுள்ளான் இந் நிலையில் அம் மனிதனின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் 6 கிலோ கிராம்—(மீட்டர்)^2 ஆகும். கைகளை உள்ளிழுத்துக் கொள்வதன் மூலம் நிலைமத் திருப்புத்திறனை அவன் 2 கிலோ கிராம்—(மீட்டர்)^2 ஆகக் குறைத்துக் கொண்டால் சுழல், மேடையின் கோணத் திசை வேகம் எவ்வாறு மாறும்? ஆற்றல் உயர்வு எவ்வளவு?

தொடக்கத்தில் நிலைமத் திருப்புத்திறன் I_1 = 6 கிலோகிராம்—(மீட்டர்)^2

தொடக்கத்தில் கோணத் திசைவேகம் $\omega_1 = 2\pi$ ரேடியன்/செகண்டு

இறுதியில் நிலைமத் திருப்புத்திறன் I_2 = 2 கிலோகிராம்—(மீட்டர்)^2

இறுதியில் கோணத் திசைவேகம் = ω_2, என்போம்.

கோண உந்தம் மாறுவதில்லையாதலால்,

$I_1\, \omega_1 = I_2\, \omega_2$ ஆகும்.

எனவே, $\omega_2 = \frac{I_1\, \omega_1}{I_2} = 6\pi$ ரேடியன்/செகண்டு

தொடக்கத்தில் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} I_1\, \omega_1^2$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4\pi^2$ ஜூல்

இறுதியில் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} I_2\, \omega_2^2$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 36\pi^2$ ஜூல்

எனவே, இயக்க ஆற்றலில் உயர்வு

$$= 36\pi^2 - 12\pi^2$$
$$= 24\pi^2$$
$$= \mathbf{236.8} \text{ ஜூல்.}$$

விளக்கக் கணக்கு (3) இரு எடைகள் ஒரு மெல்லிய நூலின் முனைகளில் இணைக்கப்பட்டு உராய்வற்ற ஒரு கப்பியின் மீது தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. இரு எடைகளும் ஒரே கிடைத்தளத்தில் உள்ளன. ஒவ்வொரு எடையும் 500 கிராமாகவும், கப்பியின் விட்டம் 5 செ.மீ. ஆகவும் இருந்தால் (i) அவைகளின் நிறை மையத்தைக் கணக்கிடுக. (ii) ஒரு புறமிருந்து 20 கிராம் எடை மறு புறத்திற்கு மாற்றப்பட்டு, எடைகள் நகராமல் தடுக்கப்பட்டால் அவைகளின் நிறைமையத்தைக் காண்க. (iii) இந் நிலையில் எடைகளை நகர விட்டு விட்டால் நிறை மையத்தின் இயக்கத்தையும், முடுக்கத்தையும் கணக்கிடுக.

(i) இரு நிறைகளும் இருக்கும் கிடைத்தளக் கோட்டை x அச்சுக் கோடாகவும், ஒரு நிறையை ஆயத் தொடக்கமாகவும் கொள்வோம்.

நிறை மையம் x_0 என்ற தொலைவிலும், m_1, m_2 என்ற நிறைகள் முறையே x_1, x_2 என்ற தொலைவிலும் இருந்தால்

$$x_0 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{0 + 500 \times 5}{1000}$$

$$= 2.5 \text{ செ.மீ.}$$

(ii) இப்போது $m_1 = 480$, $m_2 = 520$ கி. எனக் கொண்டால், நிறை மையத்தின் தொலைவு

$$x = \frac{0 + 520 \times 5}{1000}$$

$$= 2.6 \text{ செ.மீ.}$$

எனவே, நிறை மையம் முதல் எடையிலிருந்து 2.6 செ.மீ. தொலைவிலுள்ளது.

(iii) தொகுதியின் மீது செயல்படும் வெளிப்புற விசைகளின் தொகு பயன்

$$= 520\, g - 480\, g$$
$$= 40\, g$$

இவ்விசை கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. எனவே நிறை மையத்தின் முடுக்கம்

$$= \frac{40\,g}{480+520} = 0.04\,g$$

பயிற்சிக் கணக்குகள் : (1) 10 கிலோ கிராம் நிறையுள்ளதும் சுழற்சி ஆரம் 20 செ.மீ. நீளமுள்ளதுமான ஒரு வட்டத்தட்டு ஒரு செகண்டுக்கு இருமுறை சுற்றிக் கொண்டுள்ளது. இப்போது அது 15 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள, 25 செ.மீ. சுழற்சி ஆரமுள்ள மற்ெறாரு வட்டத் தட்டுடன் இணைக்கப்பட்டால், தொகுதியின் சுழற்சி வேகம் என்ன? இரண்டாவது தட்டும் முதலில் அதே திசையில் 1 செகண்டுக்கு ஒரு முறை சுற்றிக் கொண்டிருந்தால், பொதுச் சுழற்சி வேகம் என்ன?

(2) ஒரு சுழலும் மேடையின் மீதுள்ள ஒருவன் தனது நீட்டிய இருகைகளிலும் இரு 5 கிலோ கிராம் எடைகளை வைத்துள்ளான். சுழல் மேடை இரண்டு செகண்டுகளுக்கு ஒரு சுற்றுச் சுற்றினால் அவன் கைகளைக் கீழே தொங்க விடும்போது சுழற்சி வேகம் என்ன இருக்கும்? அவனுடைய நிலைமத் திருப்புத்திறன் 2 கிலோ கிராம்—(மீட்டர்)^2 எனவும், நிறைகள் அச்சுக் கோட்டிலிருந்து முதலில் 1 மீட்டர் தொலைவிலும், பின்னர் 20 செ.மீ. தொலைவிலும் உள்ளன எனக் கொண்டு கணக்கிடுக.

(3) M நிறையும் R ஆரமும் கொண்ட ஒரு சீரான வட்டத் தட்டு அதன் மையத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கிடைத்தள அச்சைப் பொறுத்து ω_0 என்ற சுழற்சி வேகத்துடன் சுழன்று கொண்டுள்ளது. (i) அதன் கோண உந்தம் என்ன? இயக்க ஆற்றல் என்ன? (ii) அதன் முனையிலிருந்து ஒரு சிறு துண்டு உடைந்து, உடைந்த இடத்திலிருந்து நேரே செங்குத்தாக மேலே செல்கிறது. அது செல்லும் செங்குத்து உயரம் என்ன? (iii) உடைந்த துண்டின் நிறை m ஆனால், மீதமுள்ள தட்டின் சுழற்சி வேகம் என்ன? கோண உந்தம் எவ்வளவு? இயக்க ஆற்றல் எவ்வளவு?

(4) புவியின் நிறை 5.983×1024 கிலோ கிராம். ஆரம் 6.371×106 மீட்டர். (i) தன்னுடைய அச்சைப் பற்றிய சுழற்சியால் தோன்றும் கோண உந்தம் என்ன? (ii) ஞாயிற்றிலிருந்து புவியின் தொலைவு 149×106 கிலோ மீட்டர் என்றால் அதனைச் சுற்றி வருகையில் புவியின் கோண உந்தம் எவ்வளவு?

(5) (4,1), (−2,2), (1,−3) என்ற புள்ளிகளில் முறையே 8 கிலோ கிராம், 4 கிலோ கிராம், 4 கிலோ கிராம் எடைகள் உள்ளன அவற்றின் நிறை மையத்தைக் கணக்கிடுக. அம் மூன்று எடைகளின் மீதும் முறையே பின்வரும் மூன்று விசைகள் செயல்படு

கின்றன (i) $+y$ திசையில் 16 நியூட்டன் (ii) $-x$ திசையில் 6 நியூட்டன் (iii) $+x$ திசையில் 14 நியூட்டன்.

நிறை மையத்தின் இயக்கத்தின் முடுக்கம் என்ன?

(6) a என்ற பக்கமுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் முனைகளில் முறையே 1 கிலோ கிராம், 2 கிலோ கிராம், 3 கிலோ கிராம் எடைகள் உள்ளன. நிறை மையத்தைக் கணக்கிடுக.

(7) புவியின் ஆரம் 6.371×106 மீட்டர் எனவும், நிலவின் நிறை, புவியின் நிறையைப் போல் 0.013 மடங்கு எனவும், நிலவின் தொலைவு புவியின் ஆரத்தைப் போல் 60 மடங்கு எனவும் கொண்டு, புவி—நிலவுத் தொகுதியின் நிறை மையத்தைக் கணக்கிடுக.

(8) கார்பன் மோனாக்ஸைடு (CO) மூலக்கூறில் கார்பன் அணுவுக்கும், ஆக்சிஜன் அணுவுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு $1.13 \times 10-10$ மீட்டர் எனக் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. கார்பனின் அணு நிறை 12 எனவும், ஆக்சிஜனின் அணு நிறை 16 எனவும் கொண்டு, மூலக்கூறின் நிறை மையத்தைக் கணக்கிடுக.

(9) m_1, m_2 என்ற நிறைகள் r என்ற தொலைவில் உள்ளன அவற்றின் நிறை மையத்தின் வழியே அவற்றை இணைக்கும் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்தான கோட்டைப் பொறுத்து அவை சுழன்று கொண்டுள்ளன. கோண உந்தம் $\sqrt{j(j+1)}\,\dfrac{h}{2\pi}$ ஆனால், சுழற்சி இயக்க ஆற்றலைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு III

நிலையியல்

(Statics)

81. ஒரு துகளின் சமநிலை (Equilibrium of a particle)

சமநிலையும், அமைதி நிலையும் : விசைகள் செயல்படுதலால் பொருளின் இயக்கத்தில் தோன்றும் மாறுதல்களைப் பற்றி இயக்க வியலில் கண்டோம். விசைகள் செயல்பட்டாலும் பொருளின் இயக்கத்தில் எவ்வித மாற்றமுமின்றி யிருந்தால், அப் பொருள் சம நிலையில் (equilibrium) உள்ள தென்கிறோம். சம நிலையில் உள்ள பொருள் சீரான திசை வேகத்துடன் (uniform velocity) சென்று கொண்டிருக்கலாம்; அல்லது அமைதி நிலையில் (rest) இருக்கலாம். ஏனெனில், இவ் விரு நிலைகளிலும் பொருளின் இயக்கத்தில் மாறுதல் உண்டாவதில்லை. இவ்வாறு விசைகள் செயல்படும் போது பொருள் சம நிலையிலிருந்தால் அவ் விசைகளைப் பற்றிய எந்திரவியலின் ஒரு பகுதியே நிலையியல் (statics) ஆகும்.

ஒரு தள விசைகள் (Coplanar forees):

பொதுவாக, செயல்படும் விசைகளனைத்தும் ஒரு தளத்தில் இருப்பதில்லை. எனினும், ஒரு தள விசைகள் பற்றிய அறிவைக் கொண்டு, மற்றவைகளைப் பற்றி எளிதில் அறிந்துக் கொள்ள இயலும். நாம் இங்கு ஒரு தள விசைகளைப் பற்றி மட்டுமே காண்போம். பெரும்பாலான விதிகள், விசைகள் ஒரு தளத்தில் இல்லாவிடினும் பொருந்துவனவாகும். விசைகளின் திருப்புத் திறன்கள், கோணத் திசைவேகம், கோண உந்தம் போன்ற வெக்டார் அளவுகளை ஒரு தளத்தில் உள்ள விசைகளைக் கற்கும்போது ஸ்கேலார்களாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே, ஒருதள எந்திரவியல் பின்வரும் பகுதிகளைக் கொண்டதாகும்: (i) ஒரு நிலையான தளத்தில் உள்ள துகள்களின் இயக்கவியலும், நிலையியலும். (ii) நிலையான தளமொன்றிற்கிணையாக நகரும், ஒவ்வொரு துகளும் அத் தளத்திற்கிணையான இடப்பெயர்ச்சி, திசைவேகம், ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள திண்பொருட்களின் இயக்கவியலும், நிலையியலும்,

துகளொன்றின் சமநிலை (Equilibrium of a particle):

நியூட்டன் விதிப்படி, எந்தப் பொருளும் முடுக்கமின்றி இருக்க வேண்டுமானால், அதன் மீது செயல்படும் விசை சுழியாக வேண்டும். எனவே, $\vec{F}$ என்ற விசை செயல்பட்டுத் துகள் சமநிலையில் இருக்கத் தேவையானதும், போதுமானதுமான (necessary and sufficient) நிபந்தனை

$$\vec{F} = 0 \tag{81.1}$$

என்பதாகும்.

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ .... முதலிய பல விசைகள் செயல்படும்போது துகள் சம நிலையில் இருக்க வேண்டுமானால், அதற்கான தேவையானதும், போதுமானதுமான நிபந்தனை

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \ldots\ldots = 0 \tag{81.2}$$

என்பதாகும்.

இந்த வெக்டார் சமன்பாட்டைப் பின்வரும் மூன்று ஸ்கேலார் சமன்பாடுகளாக எழுதலாம்.

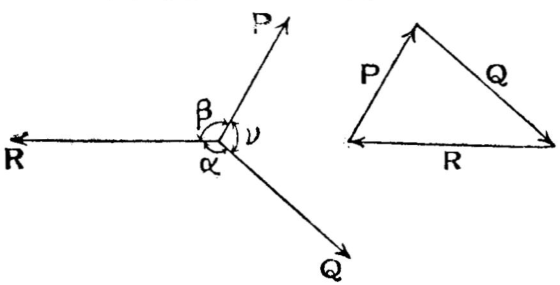
$$P_x + Q_x + R_x + \ldots\ldots = 0 \tag{81.3}$$
$$P_y + Q_y + R_y + \ldots\ldots = 0 \tag{81.4}$$
$$P_z + Q_z + R_z + \ldots\ldots = 0 \tag{81.5}$$

இதுவரை கூறியவை யனைத்தும் விசைகள் ஒரு தளத்தில் இல்லாவிடினும் பொருந்துவன வாகும். ஒருதள விசைகளானால், இரண்டு ஸ்கேலார் சமன்பாடுகள் போதுமானவை.

சமன்பாடு *(81.2)* -ஐக் கொண்டு பின்வரும் தேற்றங்களை எளிதில் நிறுவலாம்:

(i) விசைகளின் முக்கோண விதி (low of triangle of forces):

மூன்று விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படும்போது, அம் மூன்று விசைகளையும், ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களால், எண்



படம் 79

மதிப்பிலும், திசையிலும், சுற்று வரிசையில் குறிக்க இயலுமாயின், அவ் விசைகள் சம நிலையைத் தோற்றுவிப்பனவாகும்.

(ii) விசைகளின் பல கோண விதி (law of polygon of forces):

பல விசைகள் ஒரு துகளின் மீது செயல்படும்போது, அவ் விசைகளை சுற்று வரிசையில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு முற்றுப் பெற்ற பல கோணத்தின் பக்கங்களால், எண் மதிப்பிலும், திசையிலும் குறிக்க இயலுமானால், அவ் விசைகள் சம நிலையைத் தோற்றுவிப்பன வாகும்.

(iii) லாமியின் தேற்றம் (Lami's theorem):

$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ என்ற மூன்று விசைகள் செயல்பட்டு ஒரு துகள் சம நிலையிலிருந்தால்,

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma} \qquad (81.6)$$

ஆகும். α -என்பது $\vec{Q}, \vec{R}$ இவற்றின் இடைக் கோணத்தையும், β -என்பது $\vec{P}, \vec{R}$ இவற்றின் இடைக் கோணத்தையும், γ -என்பது $\vec{P}, \vec{Q}$ இவற்றின் இடைக் கோணத்தையும் குறிக்கின்றன.

82. துகள் தொகுதி யொன்றின் சமநிலை (Equilibrium of a system of particles):

உள் விசைகளும், வெளிப்புற விசைகளும் (Internal and external forces):

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொகுதியில் உள்ள ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் விசை, அதே தொகுதியிலுள்ள மற்றொரு துகளால் செலுத்தப்பட்ட விசையாக இருந்தால், அதனை உள் விசை என்கிறோம். மற்ற விசைகளை யெல்லாம் வெளிப்புற விசைகளென் கிறோம். நியூட்டன் மூன்றும் விதிப்படி, உள் விசைகள் வினை, எதிர்வினை (action, reaction) என்று எப்போதும் இரட்டை களாகவே இருக்கின்றன வாதலால், எல்லா உள் விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும்.

சம நிலைக்குத் தேவையான நிபந்தனைகள் (Necessary conditions for equilibrium):

இப்போது ஒரு துகட்டொகுதி சம நிலையில் இருப்பதற்குத் தேவையான நிபந்தனைகளைக் காண்போம். இந்த நிபந்தனைகள்

சம நிலையிலுள்ள தொகுதிக்குப் பொருந்த வேண்டுமானால், இந்த நிபந்தனைகள் பொருந்தினால் தொகுதி சம நிலையிலிருக்க வேண்டு மென்பதில்லை. ஆதலால்தான், இவற்றைத் தேவையான நிபந்தனைகள் (necessary conditions) என்கிறோம்.

ஒரு சம நிலையிலுள்ள தொகுதியில் ஏதேனுமொரு துகளைக் காண்போம். அத் துகள் சம நிலையிலிருப்பதால், அதன் மீது செயல்படும் விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாக வேண்டும். இது அத் தொகுதியில் உள்ள எல்லாத் துகள்களுக்கும் பொருந்துமாதலால், தொகுதியின் மீது செயல்படும் எல்லா விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாக வேண்டும். ஒரு தொகுதியில் உள்ள துகள்களின் மீது செயல்படும் விசைகள் உள் விசைகளாகவோ, அல்லது வெளிப்புற விசைகளாகவோ இருக்கலாம். ஆனால், நியூட்டன் மூன்றும் விதிப்படி தொகுதியின் உள் விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாகுமாதலால், துகட்டொகுதி சம நிலையிலிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளிலொன்றைப் பின் வருமாறு கூறலாம்.

"துகட்டொகுதியின் மீது செயல்படும் எல்லா வெளிப்புற விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாக வேண்டும்."

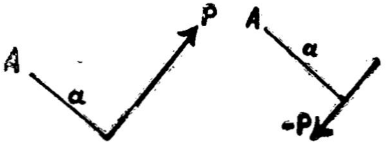
83. ஒரு கோட்டைப் பொறுத்து வெக்டாரின் திருப்புத் திறன் (Moment of a vector about a line)

L -என்ற ஒரு கோட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம். அதற்கு நேர்க்குத்தாக ஆனால், அதனை வெட்டாத $\vec{P}$ -என்ற ஒரு வெக்டார் உள்ள தென்போம். $\vec{P}$ -யின் வினைக் கோட்டுக்கும்; L -க்கும் நேர்க்குத்தான பொது நேர்க்குத்துக் கோட்டின் நீளம் a என்போம். L -ஐப் பொறுத்து $\vec{P}$ -யின் திருப்புத் திறன் M ஆனால்,

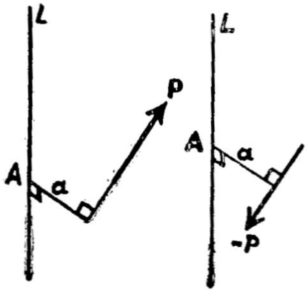
$$M = \pm aP \qquad (83.1)$$

ஆகும்.

கோட்டைப் பொறுத்து $\vec{P}$ -யின் திசை கடிகார முள்ளின் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் சுழற்சியைத் தோற்றுவிக்கும் வண்ணம் இருந்தால் $M = +aP$ எனவும், கடிகார முள்ளின் திசையில் சுழற்சியைத் தோற்றுவிக்கும் வண்ணம் இருந்தால் $M = -aP$ எனவும் கொள்வோம்.



படம் 80 A



படம் 80B

இப்போது $\vec{P}$ என்ற வெக்டார் L-க்கு நேர்க்குத்தான தாக இல்லையென்போம். இந் நிலையில் L-ஐப் பொறுத்து $\vec{P}$-யின் திருப்புத் திறன், L-ஐப் பொறுத்து, அதற்கு நேர்க்குத்தான தளத்தில் $\vec{P}$-யின் வீழ்ச்சி (Projection)-யின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும்.

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து பின்வரும் உண்மைகள் புலப்படுகின்றன:

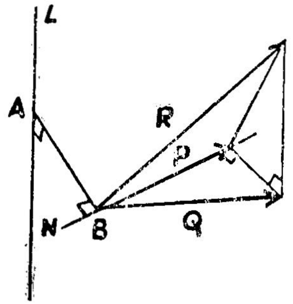
(i) எண் மதிப்பிலும், திசையிலும் மாற்ற மின்றி, $\vec{P}$ அதன் வினைக் கோட்டின் வழியே நகர்ந்தால் L-ஐப் பொறுத்து $\vec{P}$-யின் திருப்புத் திறன் மாறுவதில்லை.

(ii) $\vec{P}$, $-\vec{P}$ என்ற ஒரே கோட்டில் உள்ள இரு வெக்டார்களின் L-ஐப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும்.

(iii) $\vec{P}$-யை L-க்கு இணையான திசையில், அதன் எண் மதிப்பையோ திசையையோ மாற்றாமல் நகர்த்தும் போது L-ஐப் பொறுத்து அதன் திருப்புத் திறன் மாற்ற முறுவதில்லை.

ஒரு தள வெக்டார்களின் திருப்புத் திறன்களை அத் தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான ஒரு நேர் கோட்டைப் பொறுத்துக் காணும்போது, அந் நேர்கோடு அத்தளத்தை வெட்டுகின்ற புள்ளியைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்கள் என அவைகளைக் கூறுவதுண்டு.

தேற்றம் : B-என்ற புள்ளியிலிருந்து கிளம்பும் $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$...... என்ற வெக்டார்களின் L-என்ற கோட்டைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை, அதே B என்ற புள்ளியிலிருந்து

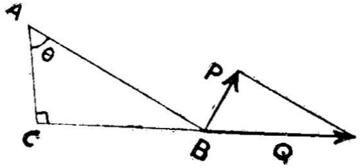


படம் 81

கிளம்பும் $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \dots\dots\dots$என்ற ஒரு வெக்டாரின் L-ஐப் பொறுத்த திருப்புத் திறனுக்குச் சமம்.

B என்ற புள்ளியிலிருந்து தோன்றும் $\vec{R}$ என்ற வெக்டாரைக் காண்போம். B-யிலிருந்து L-க்கு வரையப்படும் நேர்குத்துக் கோடு L-ஐ A-யில் சந்திக்கட்டும். L-க்கு நேர்குத்தாக B-யின் வழியே செல்லும் தளத்தின் மீது $\vec{Q}$ என்பது $\vec{R}$-ன் வீழ்ச்சி (projection) யாக இருக்கட்டும். AB-க்கு நேர்குத்தாக B-யின் வழியே செல்லும் கோடு N என்போம். N-ன் மீது $\vec{Q}$ மீது வீழ்ச்சி $\vec{P}$ என் போம். N-ன் மீது $\vec{R}$-ன் வீழ்ச்சியும் $\vec{P}$-தான் என்பது தெளிவு. இப்போது L ஐப் பொறுத்து P-யின் திருப்புத்திறனும் R-ன் திருப்புத் திறனும் சமமெனக் காட்டுவோம்.

$\vec{P}, \vec{Q}$, AB ஆகியவை களடங்கிய தளத்தைப் படம் காட்டு கிறது. $\vec{Q}$-வின் வினைக் கோட்டுக்கு நேர்குத்தாக AC என்ற கோட்டை வரைவோம். $\angle CAB = \theta$ என்போம். L-ஐப்



படம் 82

பொறுத்து $\vec{R}$-ன் திருப்புத்திறன், வரையறைப்படி $\vec{Q}$-வின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமம். எனவே, திருப்புத்திறன்

$$M = Q\,.\,AC = Q\,.\,AB\cos\theta$$

$$= AB\,.\,Q\cos\theta = AB\,.\,P$$

எனவே,

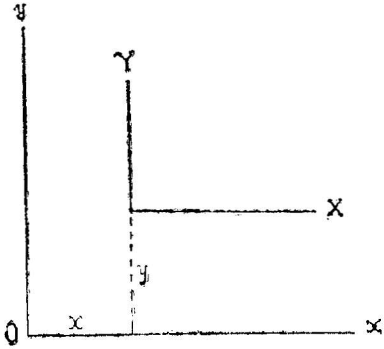
$$Q\,.\,AC = P\,.\,AB \qquad (83.2)$$

P . AB என்பது L-ஐப் பொறுத்து $\vec{P}$-யின் திருப்புத் திறனாகும்.

எனவே, L-ஐப் பொறுத்து B-யில் உள்ள ஒரு வெக்டாரின் திருப்புத் திறன், B, L ஆகியவற்றைக் கொண்ட தளத்துக்கு நேர்க் குத்தான, B யின் வழியே செல்லும் கோட்டில், அந்த வெக்டாரின் வீழ்ச்சியின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமம். ஒரு கோட்டின் மீது பல வெக்டார்களின் கூட்டுத் தொகையின் வீழ்ச்சி, அதே கோட்டின் மீது தனித்தனி வெக்டார்களின் வீழ்ச்சிகளின் கூட்டுத் தொகைக் குச் சமமாகும். எனவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

நிலையியலில் நாம் திருப்புத்திறன்களைக் கணக்கிடக் கூடிய வெக்டார்கள் விசைகள் மட்டுமே. ஆனால், மேலே கூறியவையனைத் தும் எல்லா வெக்டார்களுக்கும் பொருந்துவன.

(X, Y, Z) என்ற கூறுகளுள்ள (Components) ஒரு வெக்டார் (x, y, z) என்ற புள்ளியில் செயல்படுவதாகக் கொள்வோம். Oxy



படம் 83

என்ற தளத்தில் அதன் வீழ்ச்சி படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. Oxy என்ற தளத்துக்கு நேர்குத்தாக O-வின் வழியே செல்லும் கோட்டைப் பொறுத்து அந்த வெக்டாரின் திருப்புத்திறன்

$$M = xY - yX \qquad (83.3$$

Oxy என்ற தளத்துக்கு நேர்குத்தாக (a, b) என்ற புள்ளியின் வழியே செல்லும் கோட்டைப் பொறுத்து அந்த வெக்டாரின்) திருப்புத்திறன்

$$M_1 = (x-a)\,Y - (y-b)\,X \qquad (83.4)$$

சமநிலைக்கான தேவையான நிபந்தனைகள் (necessary Conditions for equilibrium : இப்போது சமநிலையிலுள்ள துகட்டொகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். L-என்பது ஏதேனுமொரு கோடாக இருக்கட்டும். துகட்டொகுதியில் எந்த ஒரு துகளும் சமநிலையிலுள்ளதாதலால், அதன் மீது செயல்படும் விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும். எனவே, மேலே கண்ட தேற்றப்படி அத் துகளின் மீது செயல்படுகின்ற விசைகளின் L-ஐப் பொறுத்த திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும். L-ஐப் பொறுத்து, ஒன்றுக் கொன்று சமமானதும், எதிரெதிர்த் திசைகளில் உள்ளதுமான இரு உள் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும். எனவே, L-ஐப் பொறுத்து, எல்லா வெளிப்புற விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை சுழியாக வேண்டும்.

இப்போது துகட்டொகுதி சமநிலையிலிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

"ஒரு துகட்டொகுதி சமநிலையிலிருந்தால், (i) அதன் மீது செயல்படும் வெளிப்புற விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும். (ii) எந்தக் கோட்டைப் பொறுத்தும் அதன் மீது செயல் படுகின்றன எல்லா வெளிப்புற விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும்."

ஒரு தள விசைகளைப் பொறுத்த நிலையியலில் மேற் கூறிய நிபந்தனைகளைப் பின் வருமாறு குறிக்கலாம்:

$$\vec{F} = 0\,; \quad N = 0 \qquad (83.5)$$

$\vec{F}$ என்பது அடிப்படைத் தளத்தின் மீது எல்லா வெளிப்புற விசைகளின் வீழ்ச்சிகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகையையும், N என்பது அத் தளத்துக்கு நேர்குத்தான ஏதேனுமொரு கோட்டைப் பொறுத்து அவ் விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகையையும் குறிக்கின்றன.

அடிப்படைத் தளம் $z = 0$ ஆக உள்ளவாறு நாம் அச்சுக் கோடுகளை (axes) எடுத்துக் கொள்வோம். z -அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிடுவோம். துகள் தொகுதியின் மீது (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) .... (X_n, Y_n, Z_n) என்ற கூறுகளுள்ள (Components) வெளிப்புற விசைகள் செயல்படுவதாகக் கொள்வோம். அவ்விசைகள் முறையே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) என்ற புள்ளிகளில் செயல்படுகின்றன என்போம். அடிப்படைத் தளத்தின் மீது வீழ்ச்சிகளைக் (projections) கண்டால்,

$\vec{F}$, N என்பவைகளை அடிப்படைத் தளத்திலுள்ள (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),......... (X_n, Y_n) என்ற கூறுகள் கொண்ட முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2),..........(x_n, y_n) என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும் விசைகளாகவும், அவற்றின் திருப்புத் திறன்களாகவும் கொள்வதில் தவறில்லை.

எனவே, (X, Y) என்பன $\vec{F}$-ன் கூறுகளானல்,

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \; Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (83.6)$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) \qquad (83.7)$$

எனக் கிடைக்கும். எனவே, துகட்டொகுதி சமநிலையிலிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \qquad (83.8)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \qquad (83.9)$$

அடிப்படைத் தளத்திற்கு நேர்க்குத்தான வேறு எந்தக் கோட்டைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டாலும், வேறு புதிய நிபந்தனைகள் அல்லது, சமன்பாடுகளைப் பெற இயலாது. ஏனெனில், சமன்பாடு (83.4) -ன்படி, (a, b) என்ற புள்ளியின் வழியே செல்லும் நேர்க்குத்துக் கோட்டைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்

$$\sum_{i=1}^{n} [(x_i - a) Y_i - (y_i - b) X_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i Yi - y_i Xi) - a \sum_{i=1}^{n} Yi + b \sum_{i=1}^{n} Xi$$

எனக் கிடைக்கும். சமன்பாடுகள் (83.8), (83.9) ஆகியவை களின்படி இது சுழியாவதால், இதிலிருந்து வேறு நிபந்தனைகள் கிடைப்பதில்லை.

எனவே, சமன்பாடுகள் (83.8), (83.9) ஆகியவை மூன்றே மூன்று நிபந்தனைகளை மட்டுமே கொடுக்கின்றன.

மேலே கூறியவற்றிலிருந்து பின் வரும் முடிவுகளை எளிதில் பெறலாம் :

(i) ஒரு தொகுதியில் இரு விசைகள் செயல்பட்டு அத் தொகுதி சம நிலையிலிருந்தால், அவ் விசைகள் ஒரே வினைக் கோட்டையுடையனவாயும், சம எண் மதிப்புக்கள் கொண்டவை யாகவும், எதிரெதிர்த் திசைகளில் உள்ளவையாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) ஒரு தொகுதியின் மீது மூன்று விசைகள் மட்டுமே செயல் பட்டு, அத் தொகுதி சம நிலையிலிருந்தால், அவ் விசைகள் ஒரே தளத்தில் இருப்பதுடன், அவைகளின் வினைக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பவையாகவோ, அல்லது ஒன்றுக் கொன்று இணை யாகவோ, இருத்தல் வேண்டும்.

84. சமனத் தொகுதிகள் (Equipollent systems):

பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்குடன்படும் இருவிசைத் தொகுதி கள் சமன அமைவு (Equipollence) உடையவை எனப்படும்:

(i) ஒரு தொகுதியிலுள்ள எல்லா விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை, மற்றொன்றிலுள்ள எல்லா விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) ஏதேனுமொரு கோட்டைப் பொறுத்து ஒரு தொகுதியி லுள்ள விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை, அதே கோட்டைப் பொறுத்து மற்றொரு தொகுதியிலுள்ள விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாக வேண்டும்.

ஒரு தளத்தைப் பொறுத்த எந்திரவியலில் ஒரு தளச் சமன அமைவு (plane equipollence) என்பது போதுமானது. அடிப்படைத் தளத்தில் இரு விசைத் தொகுதிகள் சமன அமைவுடன் இருக்கப் பின்வரும் நிபந்தனைகள் பொருந்த வேண்டும்:

(i) அடிப்படைத் தளத்தின் மீது ஒரு தொகுதியின் எல்லா விசைகளின் வீழ்ச்சிகளின் (projections) வெக்டார் கூட்டுத் தொகை, மற்றொரு தொகுதியின் எல்லா விசைகளின் வீழ்ச்சிகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாக வேண்டும்.

(ii) அடிப்படைத் தளத்துக்கு நேர்குத்தான ஒரு கோட்டைப் பொறுத்து, ஒரு தொகுதியின் எல்லா விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை, அதே கோட்டைப் பொறுத்து, மற்றொரு தொகுதியின் எல்லா விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாக வேண்டும்.

$\vec{F}, \vec{F}^1$ என்பன முறையே இரு தொகுதிகளின் விசைகளின் வீழ்ச்சிகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகைகளாகவும், N, N^1 என்பன ஏதேனுமொரு கோட்டைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன் களின் கூட்டுத் தொகைகளாகவும் இருந்தால், அவ் விரு விசைத் தொகுதிகளும் ஒரு தளச் சமன அமைவுடன் (plane equipollence) இருக்க வேண்டுமாயின்,

$$\vec{F} = \vec{F}^1 \; ; \quad N = N^1 \tag{84.1}$$

ஆக வேண்டும்.

$\vec{F} = 0$; $N = 0$ ஆனால், விசைத் தொகுதி சுழிக்கு ஒரு தளச் சமன அமைவுடையது (plane equipollent to zero) எனக் கூறுவோம்.

பின் வரும் பகுதிகளில் ஒரு தளத்தில் (அடிப்படைத் தளத்தில்) மட்டுமே உள்ள விசைகளைக் காண்போம்.

85. இரட்டைகள் (Couples):

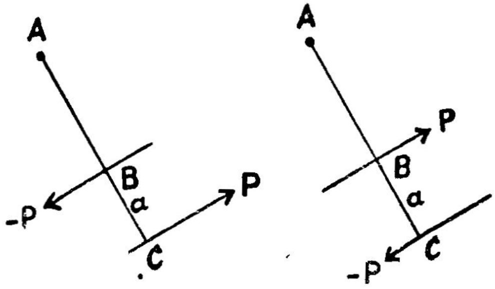
சம எண் மதிப்புக்கள் கொண்ட இரு விசைகளின் வினைக் கோடுகள் இணையாகவும், திசைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்த் திசையிலுமிருந்தால், அவ்வமைப்பை 'இரட்டை' என்கிறோம்.

எனவே, $\vec{P}, -\vec{P}$ என்ற இரு விசைகளை ஒரு இரட்டை என்கிறோம். இரு வினைக் கோடுகளுக்கு நேர்க்குத்தான கோட்டின், வினைக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள நீளத்தை இரட்டையின் புயம் (arm) என்கிறோம்.

இரட்டையில் உள்ள இரு விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாகும்.

இப்போது இரட்டையின் இரு விசைகளுக்கு அதன் தளத்திற்கு நேர்க்குத்தான A என்ற கோட்டைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன் களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்போம்.

AB, AC என்பன A யிலிருந்து விசைக் கோடுகளுக்கு வரையப் பட்ட நேர்க்குத்துக் கோடுகளானால், திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை, முதல் படத்தில்



படம் 84

$$M = P \cdot AC - P \cdot AB = P \cdot BC = Pa$$

எனவும், இரண்டாவது படத்தில்

$$M = P \cdot AB - P \cdot AC = -P \cdot BC = -Pa$$

எனவும் கிடைக்கின்றன. இவற்றில் a என்பது இரட்டையின் புயத்தின் நீளமாகும்.

எனவே, $$M = \pm Pa \qquad (85.1)$$

+ குறி இடஞ்சுழிச் (anti-clockwise) சுழற்சியைத் தோற்று விக்கக் கூடிய இரட்டைக்கும், − குறி வலஞ்சுழிச் (clockwise) சுழற்சியைத் தோற்றுவிக்கக் கூடிய இரட்டைக்கும் பயன்படுத்தப் படுகின்றன.

இரட்டையின் தளத்திற்கு நேர்குத்தான எந்தக் கோட்டைப் பொறுத்தும் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை சமமாக இருக்கக் காண்கிறோம். எனவே, இரட்டையின் திருப்புத் திறனெனக் குறிப்பிடுகையில், எந்தக் கோட்டைப் பொறுத்து எனக் குறிப்பிடத் தேவையில்லை.

இரட்டையிலுள்ள விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாதலால், அடிப்படைத் தளத்தில் ஒரே திருப்புத்திறனைக் கொண்ட இரு இரட்டைகள் சமன அமைவுடையன (equipollent).

மேலும் அடிப்படைத் தளத்தில் M, M^1 என்ற திருப்புத்திறன் களுள்ள இரு இரட்டைகள் அதே தளத்தில் $(M+M^1)$ என்ற திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு இரட்டைக்குச் சமன அமைவுடையவை யாகும்.

ஒரு தள விசைத் தொகுதியைச் சுருக்கிக் கூறல் (Reduction of a plane force system) : அடிப்படைத் தளத்திலுள்ள ஒரு விசைத் தொகுதியைக் காண்போம். $\vec{F}$ என்பது அவ்விசைகளின் வெக்டர கூட்டுத் தொகையையும் N என்பது O-என்ற புள்ளியைப் பொறுத்த திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகையையும் குறிக் கட்டும். இவ்வாறின்றி, O-வில் $\vec{F}$ என்ற ஒரு தனி விசையும் N என்ற திருப்புத்திறனுள்ள ஒரு இரட்டையும் அத்தளத்தில் உள்ளன எனக் கொள்வோம். இந்த எளிய அமைப்பு, முந்திய அமைப்புக் குச் சமன அமைவுள்ளது (equipollent) என்பது தெளிவு.

எனவே, பொதுவாகப் பின்வருமாறு கூறலாம்:

"அடிப்படைத் தளத்திலுள்ள ஒரு விசைத் தொகுதி அத் தளத்தின் ஏதேனுமொரு புள்ளியில் செயல்படும் ஒரு விசை, ஒரு இரட்டை ஆகியவைக்குச் சமன அமைவுள்ளதாகும்."

இதனைப் பின்வருமாறும் கூறலாம் : "ஒரு அடிப்படைத் தளத்திலுள்ள விசைத் தொகுதியை ஒரு விசை, ஒரு இரட்டை ஆகியவையாகச் 'சுருக்கிக்' கூறலாம்"

எனவே, (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ... (X_n, Y_n) என்ற கூறு களுள்ள விசைகள் கொண்ட தொகுதியை, ஆயத் தொடக்கப்புள்ளி யில் (origin) உள்ள (X, Y) என்ற கூறுகளுள்ள ஒரு விசையாகவும் N என்ற இரட்டையாகவும் சுருக்கிக் கூறினால்,

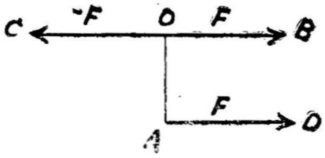
$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \; ; \; Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{85.2}$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) \tag{85.3}$$

எனக் கிடைக்கும்.

இப்போது இதனை மேலும் சுருக்க முடியுமெனக் காட்டுவோம்:

(i) முதல் வகை : $\vec{F} \neq O$ எனக் கொள்வோம். O-என்பது ஏதேனுமொரு புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். விசைத் தொகுதியை $\vec{F}$ என்ற O-வில் செயல்படும் ஒரு விசையாகவும், N திருப்புத் திறனுள்ள இரட்டையாகவும் சுருக்க இயலும். படத்தில் $\overrightarrow{OB}$ என்பது $\vec{F}$ என்ற விசையைக் குறிக்கட்டும். OA என்ற $\frac{N}{F}$ நீள



படம் 85

முள்ள OB -க்கு நேர்குத்தான கோட்டை வரைவோம். அவ்வாறு ஞல், இரட்டையை $\vec{OC} = -\vec{F}$ என்ற O-வில் செயல்படும் விசையாகவும், $\vec{AD}$ என்ற A யில் செயல்படும் விசையாகவும் பிரிக்கலாம். எனவே, இப்போது தொகுதி O -வில் $\vec{F}$, $-\vec{F}$ என்ற இரு விசைகளாகவும், A -யில் $\vec{}$ என்ற விசையாகவும் சுருக்கப்பட்டுள்ளது. இம் மூன்று விசைகளும் A -யில் $\vec{F}$ என்ற விசைக்குச் சமன அமைவுடையவை (equipollent).

(ii) **இரண்டாம் வகை :** $\vec{F} = O$ ஆனுல், தொகுதியை ஒரு இரட்டையாகச் சுருக்கலாம்.

எனவே, "அடிப்படைத் தளத்தில் எந்த ஒரு விசைத் தொகுதியையும், ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு இரட்டையாகவோ சுருக்க இயலும்."

பெரும்பாலான இடங்களில் விசைத் தொகுதி ஒரு தனி விசையாகக் சுருங்குவதையே காண்போம். ஏனெனில் ஒரு இரட்டையாகச் சுருங்க வேண்டுமாளுல் $\vec{F} = O$ என்ற ஒரு சிறப்பு நிபந்தனையும் பொருந்த வேண்டும். அதாவது விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாக வேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட விசைத் தொகுதி (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),......... $(X_n\ Y_n)$ என்ற கூறுகளைக் கொண்ட விசைகளையுடையதாகவும், அவ்விசைகள் முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2).. ......(x_n, y_n) என்ற புள்ளிகளில் செயல்படுகின்றன எனவும் கொள்வோம். இத் தொகுதி (X, Y) என்ற கூறுகளையுடைய (x, y) என்ற புள்ளியில்

செயல்படும் ஒரு விசையாகச் சுருக்கப் படுகின்றதெனவும் கொள் வோம். அப்போது,

$$X = \sum_{i=1}^{n} Xi; \; Y = \sum_{i=1}^{n} Yi \qquad (85.4)$$

$$xY - yX = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) \qquad (85.5)$$

சமன்பாடு (8.4), ஒற்றை விசையின் கூறுகளைத் தரும். சமன் பாடு (85.5), விசைச் செயல்படும் புள்ளியின் ஆயங்களின் தொடர் பைத் தருகிறது. இது ஒரு நேர்கோட்டுக்கான சமன்பாடு.

$xY - yX = M$ என்போம்:

இதனை $y = \frac{Y}{X} x - \frac{M}{X}$ என எழுதலாமாதலால்,

இக்கோடு (X, Y) என்ற கூறுகளுள்ள விசையின் வினைக்கோடென் பது தெளிவாகிறது. இக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியைப் பின் வரும் சீரமைவு (symmentric) வாய்பாடுகளின் மூலம் பெறலாம்:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Yi}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} ; \; y = \frac{\sum_{=1}^{n} y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \qquad (85,6)$$

இப்போது,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = O; \; \sum_{i=1}^{n} Y_i = O \qquad (85 \cdot 7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) \neq O \qquad (85,8)$$

என இருந்தால் சமன்பாடுகள் (85.4), (85.5) ஆகியவை களுக்குப் பொருந்தும் வகையில் X, Y, x, y ஆகியவற்றை நாம் காண இயலாது. இந் நிலையில் விசைத் தொகுதியை ஒரு ஒற்றை விசையாகச் சுருக்கிக் கூற முடியாது. அத் தொகுதி ஒரு இரட்டை யாகச் சுருங்கும். இவ்விரட்டையைக் காண நாம் இதனை

(O, Y), (O, —Y) என்ற முறையே (O, O), (O, x) என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும் விசைகளைக் கொண்ட இரட்டையுடன் ஒப்

பிடுவோம். இவ்விரட்டைக்குச் சமன அமைவுக்கான நிபந்தனைகளின் படி (Conditions for equipollence),

$$O+O = O; \ -Y+Y = O$$

$$x\,Y = \sum_{i=1}^{n} (x_i\,Y_i - y_i\,X_i)$$

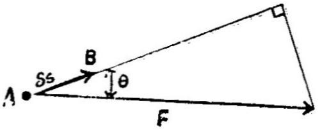
எனக் கிடைக்கும். எனவே, இரட்டையின் திருப்புத்திறன்

$$M = \sum_{i=1}^{n} (x_i\,Y_i - y_i\,X_i) \qquad (85.9)$$

ஆக இருந்தால் அவ்விரட்டை சமன அமைவு கொண்டதாகும்.

86. செயல் அல்லது பணி (Work)

A என்ற துகளின் மீது $\vec{F}$ என்ற விசை செயல்படுவதாகக் கொள்வோம். துகள் $\vec{\delta s}$ என்ற இடப் பெயர்ச்சியுற்றால், $\vec{F}$ என்ற விசை புரிகின்ற பணி



படம் 86

$$\delta w = \vec{F} \cdot \vec{\delta s} = F\,\delta s \cos\theta \qquad (86.1)$$

ஆகும். இதனை

$$\delta w = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z \qquad (86.2)$$

எனவும் எழுதலாம். இதில், (X, Y, Z) என்பன $\vec{F}$ -ன் கூறுகளையும் $(\delta x, \delta y, \delta z)$ என்பன $\vec{\delta s}$ -ன் கூறுகளையும் குறிக்கின்றன.

சமன்பாடு (86.1) -லிருந்து $\vec{\delta s}$, $\vec{F}$ -க்கு நேர்க்குத்தாக உள்ளபோது δw சுழியாகும்.

பணி புரியாத விசைகள் (Forces do no work):

பின் வரும் விசைகள் பணி புரிவதில்லை:

(i) வழவழப்பான, நிலையான ஒரு பொருள் அதன் மீது தொட்டுக் கொண்டு நகரும் மற்றொரு பொருளின் மீது செலுத்தும் எதிர்வினை (reaction).

(ii) இரு வழவழப்பான பொருட்கள் தொட்டுக் கொண்டுள்ள போது தோன்றும் எதிர்வினை விசைகள்.

(iii) நிலையான பொருளின் மீது உருண்டு செல்லும் பொருளின் மீது செலுத்தப்படும் எதிர்வினை விசை.

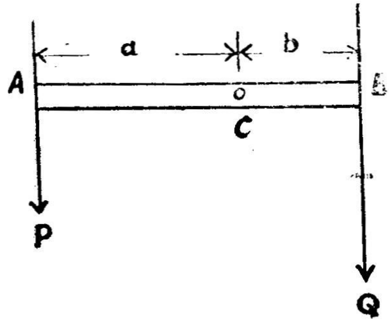
(iv) தொட்டுக் கொண்டு உருண்டு செல்லும் பொருட்களிடையே தோன்றும் எதிர்வினை விசைகள்.

(v) ஒரு திண்பொருளின் இரு துகள்களுக்கிடையே யுள்ள எதிர்வினை விசைகள்.

மேற் கூறியவைகளில் தொகுதியில் உள்ள துகள்கள் முற்றிலும் கட்டுப்பாடின்றி யிருப்பதில்லை. அத் தொகுதிகள் வரம்புறு இயக்கப் பொருட்களையே (Constrained bodies) குறிக்கின்றன. இவ் வரம்புகள் (constraints) மீறப்பாமல் இருத்தற்காகவே, எதிர் வினை விசைகள் தோனறுகின்றன. இத்தகைய வரம்புகளைப் பணியிலா வரம்புகள் (workless constraints) என்போம்.

87. மாயப்பணி (Virtual work)

AB என்றொரு திண் கோலை (rigid bar) எடுத்துக் கொள்வோம். C என்ற புள்ளியில் ஒரு சிறு துளையிடப்பட்டு, அதன் வழியே உராய்வற்ற ஓர் ஆணி செலுத்தப்பட்டு, நிலையாக உள்ளவாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, AC, C-யைப் பொறுத்துத்



படம் 87

தாளின் தளத்தில் திரும்ப இயலும். AB -க்கு நேர்க்குத்தாக A -யில் $\vec{P}$ என்ற விசையும், B -யில் $\vec{Q}$ என்ற விசையும் செயல்படுகின்றன.

இத்தகைய அமைப்பை இரு விதமாக ஆராயலாம்:

(i) AB என்பது $\vec{P}, \vec{Q}$ என்ற விசைகள் செயல்படுகின்ற, C -யைப் பொறுத்துச் சுழலக் கூடிய ஒரு திண்பொருள்

(ii) $\vec{P}, \vec{Q}$ என்ற விசைகள் மட்டுமின்றி, துகள்களுக்கிடையே எண்ணற்ற எதிர்வினை விசைகளைக் கொண்டதும், C -யில் ஒரு எதிர்வினை விசையைக் கொண்டதும், ஆனால், C -யின் அருகில் உள்ள துகட்கள் அதிலிருந்து விலகிச் செல்லாத வண்ணம் துகட்களின் இடைத் தூரங்கள் மாறாததுமான, பெரும் எண்ணிக்கையுள்ள துகள்களின் தொகுதி.

இப் பகுதியில் இரண்டாவது கூறப்பட்டிருக்கும் அமைப்பினை ஆராய்வோம்.

வரம்புகளுக்கு (constraints) உட்பட்ட ஒரே இடப்பெயர்ச்சி, C -யைப் பொறுத்த சுழற்சி மட்டுமே. ஆனால், மேற் கூறிய இரண்டாவது முறையில் அமைப்பை நோக்கினால், வரம்புக்குட் படாத பலவித இடப்பெயர்ச்சிகளைப் பெற இயலும். காட்டாக, ஒரே ஒரு துகள் மட்டும் இடப்பெயர்ச்சியுறலாம். எவ்வாறாயினும், இடப்பெயர்ச்சியை மாய இடப்பெயர்ச்சி (virtual displacement) எனக் கூறுவோம். இவ்வித மாய இடப்பெயர்ச்சிகளை இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்:

(i) வரம்புகளுக் குட்பட்ட மாய இடப்பெயர்ச்சிகள்.

(ii) வரம்புகளுக் குட் படாத மாய இடப்பெயர்ச்சிகள்,

விசைகளைப் பொறுத்தவரை $\vec{P}, \vec{Q}$ என்ற செயற்படுத்தப்பட்ட (applied) விசைகளும், C -யில் எதிர்வினை விசையும் உள்ளன. எனவே, தொகுதியின் விசைகளையும் இரு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) செலுத்தப்படும் விசைகள்.

(ii) வரம்புகளால் தோன்றும் எதிர்வினைகள்.

இவ்வாறு மாய இடப்பெயர்ச்சியால் புரியப்படும் பணியை மாயப் பணி (virtual work) என்கிறோம். வரம்புகள் பணியிலா வரம்புகளானால் (workless constraints), எதிர்வினை விசைகள் பணி புரிவதில்லை.

இப்போது மாயப் பணியின் தத்துவத்தைக் (principle) கூறுவோம்:

''வரம்புகளுக் குட்பட்ட மிகச்சிறு இடப்பெயர்ச்சி யுறும்போது செலுத்தப்பட்ட விசைகள் புரிகின்ற மாயப் பணி சுழியானல், பணியிலா வரம்புகளுக்குட்பட்ட ஒரு தொகுதி சம நிலையிலிருக்கும்; அவ்வாறு புரியும் மாயப் பணி சுழியாகாவிட்டால், தொகுதி சம நிலையிலிருக்காது''.

இவ்வுரையின் முற்பகுதி தொகுதி அமைதி நிலையிலிருக்கப் போதுமான (sufficient) நிபந்தனையையும், பிற்பகுதி தேவையான (necessary) நிபந்தனையையும் குறிக்கின்றன.

முதலில் தேவையான நிபந்தனையை மெய்ப்பிப்போம்:

வரம்புகளுக்குட்பட்ட மிகச் சிறு இடப்பெயர்ச்சி யுறும்போது, செலுத்தப்படும் விசைகள் புரியும் பணி சுழியாக வேண்டும் (தொகுதி சம நிலையிலிருத்தற்கு). சம நிலையிலிருக்கக் கூடிய தொகுதியில் ஏதேனுமொரு துகளைக் காண்போம். அத் துகள் சம நிலையிலிருத்தலால், அதன் மீது செயல்படும் விசைகளின் தொகுபயன் (resultant) சுழியாக வேண்டும். எனவே, அத் துகளடையும் இடப்பெயர்ச்சியால் அதன் மீது எந்தப் பணியும் புரியப்படுவதில்லை. இது தொகுதியின் எல்லாத் துகள்களுக்கும் பொருந்துமாதலால், தொகுதியின் மீது செயல்படும் எல்லா விசைகளும் புரியக் கூடிய மாயப் பணி சுழியாகும். ஆனல், வரம்புகளால் தோற்றுவிக்கப் சடும் விசைகள் பணி புரிவதில்லை யாதலால், தொகுதியின் மீது செலுத்தப்படும் விசைகளும் பணி புரிவதில்லை. இதுவே தேவையான நிபந்தனையாகும்.

இப்போது போதுமான (sufficient) நிபந்தனையைக் காண்போம் வரம்புகளுக் குட்பட்ட இடப்பெயர்ச்சி யுறும்போது செலுத்தப்பட்ட விசைகள் புரிகின்ற மாயப் பணி சுழியானல், தொகுதி சம நிலையிலிருக்கும். தொகுதி சம நிலையிலில்லை யெனக் கொள்வோம். அவ்வாருனல், அது நகரத் தொடங்கும் (முடுக்கத்துடன்). ஆனல், நகரத் தொடங்கும் திசை அதன் மீது செயல்படுகின்ற தொகுபயன் விசை (resultant force) யின் திசையில் இருக்கும். சமன்பாடு (86.1) -லிருந்து, தொடக்கத்தில் θ சுழியாகவும், $\cos\theta = 1$ ஆகவும் உள்ளதால், தொடக்க இடப்பெயர்ச்சியில் மாயப் பணி புரியப்பட வேண்டும். இது எல்லாத் துகட்களுக்கும் பொருந்து மாகையால், தொடக்க இடப்பெயர்ச்சியில், மாயப் பணி புரியப்படுகிறது. ஆனல், எந்த இடப்பெயர்ச்சியும் வரம்புகளுக் குட்பட்டதாகையால், வரம்புகளின் எதிர்வினைகள் பணி புரிவதில்லை. எனவே, செலுத்தப்படும் விசைகள் (applied forces) பணி புரிய வேண்டும். ஆனல், இது கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைக்கு

மாறுனது. எனவே, நாம் தொகுதி சம நிலையிலில்லை எனக் கொண்டது தவறுனதாகும். எனவே, தொகுதி சம நிலையிலிருக்க வேண்டும். இதுவே போதுமானதான நிபந்தனையை மெய்ப்பிக்கிறது.

இப்போது மீண்டும் படத்தில் (87) காட்டப்பட்ட அமையைப் நோக்குவோம். AB -யை C -யைப் பொறுத்து இடஞ் சுழியாக (counter clockwise) மிகச்சிறிய $\delta\theta$ என்ற கோணம் சுழற்றுவோம். இப்போது $\vec{P}$ -யால் புரியப்படும் பணி $P\,a.\delta\theta$ ஆகும். அதேபோல், $\vec{Q}$ -புரிகின்ற பணி $-Q\,b.\delta\theta$ ஆகும். தொகுதி சம நிலையிலிருத்தலால் புரியப்படும் பணி δw சுழியாக வேண்டும். எனவே,

$$\delta w = (Pa - Qb)\,\delta\theta = 0.$$

ஆதலால், $$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a} \qquad (87.1)$$

மாறுக, $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$ ஆனல், இத்தகைய இடப்பெயர்ச்சிக்கு δw சுழி யாகும். ஆனல், இதுதான் வரம்புக்குட்பட்ட மிக இயல்பான இடப்பெயர்ச்சி யாதலால், $\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$ என்ற நிபந்தனைக் குட்பட்டுள்ளபோது தொகுதி சம நிலையிலிருக்கிறது.

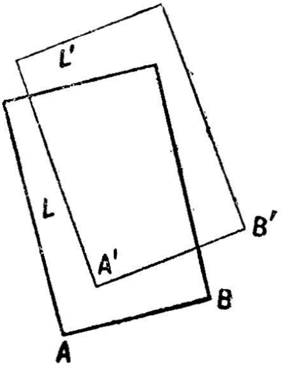
மாயப் பணித் தத்துவத்தின் சிறப்பியல்பு என்ன வென்ருல், இதில் வரம்புகளின் எதிர்வினைகளைக் கணக்கில் சேர்க்க வேண்டிய தேவையில்லை. எனினும், அவ் வெதிர்வினைகளை இத் தத்துவத்தைக் கொண்டு காண இயலும். காட்டாக, C -யில் உள்ள எதிர் வினையைக் கணக்கிடுவோம். இதனை $\vec{R}$ எனக் குறிப்போம். இப்போது C -யில் உள்ள ஆணியை அகற்றிவிட்டு அதற்குப் பதிலாக $\vec{R}$ என்ற விசையை C -யில் செலுத்தினுல் சம நிலை மாறுவதில்லை. இந் நிலையில் C –யில் வரம்பு (constraint) இல்லையாதலால், வேறு மாய இடப்பெயர்ச்சிகளைத் தர இயலும். கோலினை அதன் நீளவாக்கில் நகர்த்துவதாகக் கொள்வோம். இப்போது $\vec{P}, \vec{Q}$ ஆகியவை இடப்பெயர்ச்சிக்கு நேர்க்குத்தான திசையில் உள்ளனவாதலால், அவை பணிபுரிவதில்லை. எனவே, $\vec{R}$ என்ற விசை புரியும் பணியும் தொகுதி சம நிலையிலிருத்தலால், சுழியாகும்.

அல்லது $\vec{R}$ என்ற விசை AB -க்கு நேர்க்குத்தானதாகும். இப்போது AB -யை AB -க்கு நேர்க்குத்தான திசையில் மேல் நோக்கி δx தொலைவு நகர்த்துவதாகக் கொள்வோம். இப்போது $\vec{P}$, $\vec{Q}$ என்ற விசைகள் புரியும் பணி $-(P+Q)\,\delta x$ ஆகும். எனவே, $\vec{R}$ புரிகின்ற பணி $(P+Q)\,\delta x$ ஆக இருக்க வேண்டும். அல்லது $\vec{R}$ என்பது $(P+Q)$ என்ற எண் மதிப்புள்ளதும், $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ஆகியவற்றின் திசைக்கு எதிர்த் திசையிலுள்ளதுமான ஒரு விசையாகும்.

88. நிலையான தளத்திற்கிணையாகத் திண்பொருளின் சிறு இடப் பெயர்ச்சிகள் (Infiniresimal displacements of a rigid body parallel to a fixed plane)

ஒரு நிலையான அடிப்படைத் தளத்தில் மட்டுமே இயங்கக் கூடிய ஒரு திண்பொருளைக் காண்போம். இத்தளத்தில் திண் பொருள் ஒரு பரப்பால் குறிக்கப்படும். இப்பரப்பின் இயக்கம் திண் பொருளின் இயக்கத்தை முற்றிலும் தரவல்லது.

படத்தில் L என்பது திண் பொருளின் தொடக்க நிலையையும், L^1 என்பது அது அதே தளத்தில் ஏதேனுமொரு இடப் பெயர்ச்சிக் குப் பின்னர் அதன் நிலையையும் காட்டுகிறது. தொடக்கத்தில்



படம் 88

அப் பரப்பின் ஏதேனுமிரு புள்ளிகளை A, B என்பவை குறிக்கட்டும். இடப் பெயர்ச்சிக்குப் பின்னர் A^1, B^1 என்பவை அதே புள்ளிகளின் நிலைகளைக் குறிக்கட்டும்.

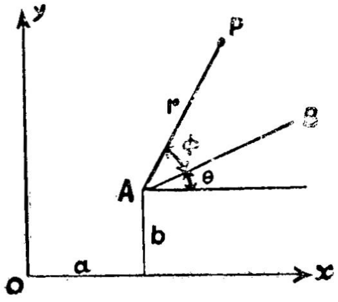
L' என்ற நிலையிலிருந்து L^1 என்ற நிலையைப் பின்வரும் இரு இடப் பெயர்ச்சிகள் மூலம் அடையலாம்:

(i) ஒரு நேர்ப் பெயர்ச்சி (translation) : இதில் L-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் AA^1-க்குச் சமமான, அதற்கிணையான இடப் பெயர்ச்சியுறுகின்றன.

(ii) ஒரு சுழற்சி (rotation) : இதில் A -ஐப் பொறுத்து AB, A^1B^1 ஆகியவற்றிற்கிடையேயுள்ள கோண அளவு சுழற்சியுறுகின்றன. (மற்ற புள்ளிகள்).

இவ்விடப் பெயர்ச்சியை விவரிக்கத் துணையாக உள்ள (base point) என்கிறோம்.

அடிப்படைத் தளத்தில் உள்ள நிலையான Oxy என்ற அச்சுக் கோடுகளைப் பொறுத்து (a, b) என்பன A -யின் ஆயங்களாகவும், θ - என்பது AB, Ox -ன் திசையுடன் உண்டாகும் கோணமாகவும் கொள்வோம் இப்போது $\delta a, \delta b$ என்ற சிறு உயர்வுகள் நேர்ப்



படம் 89

பெயர்ச்சியையும், $\delta\theta$ என்ற உயர்வு (increment) சுழற்சியையும் குறிப்பனவாகும். P என்பது பரப்பின் ஏதேனுமொரு புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். AP = எனவும் $\angle BAP = \phi$ எனவும் கொள்வோம். L என்பது திண்பொருட் பரப்பாதலால் பரப்பு இடப்பெயர்ச்சியுறுகையில், r, ϕ ஆகியவை மாறுவதில்லை.

P -யின் ஆயங்கள் (x, y) என்ருல்

$$x = a + r\cos(\theta+\phi) \qquad (88.1)$$

$$y = b + r\sin(\theta+\phi) \qquad (88.2)$$

எனக் கிடைக்கின்றன.

L என்ற பரப்பு $\delta a, \delta b, \delta\theta$ என்ற இடப் பெயர்ச்சிகள் அடையும்போது P -யின் இடப் பெயர்ச்சி

$$\delta x = \delta a - r\sin(\theta+\phi)\,\delta\theta \qquad (88.3)$$

$$\delta y = \delta b + r\cos(\theta+\phi)\,\delta\theta \qquad (88.4)$$

(88.1), (88.2) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து $r\sin(\theta+\phi)$, $r\cos(\theta+\phi)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைப் பிரதியிட்டால்

$$\delta x = \delta a - (y-b)\,\delta\theta \qquad (88.5)$$

$$\delta y = \delta b + (x-a)\,\delta\theta \qquad (88.6)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகள், அடிப்படைப் புள்ளி $\delta a, \delta b, \delta\theta$ ஆகிய இடப் பெயர்ச்சிகளுறும் போது, (ஏதேனுமொரு புள்ளி (x, y) அடையும் இடப் பெயர்ச்சியைத் தருகின்றன.

89. நிலையான தளத்திற்கிணையாக நகரக்கூடிய திண்பொருளின் சமநிலைக்கான போதுமான நிபந்தனைகள் (sufficient Conditions for equilibrium of a rigid body movable parallel to a fixed plane)

நிலையான ஒரு அடிப்படைத் தளத்துக்கிணையாக மட்டுமே நகரக்கூடிய திண்பொருளொன்றின் சமநிலையை ஆய்வோம். தளத்திற்கிணையான இயக்கத்தைத் தடுக்கக்கூடிய வரம்புகள் (Constants) இல்லை. ஆனால், தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான இயக்கங்கள் வரம்புகளால் தடுக்கப்படுகின்றன. இவ்வரம்புகள் பணியிலா (Workless) வகையைச் சேர்ந்தவை யெனக் கொள்வோம். இவ் வரம்புகளின் எதிர்வினைகளைத் தவிர வேறு செலுத்தப்படும் (applied) விசைகள் இருக்கலாம். இவ்விசைகள் அடிப்படைத் தளத்திலுள்ளவையாக இருக்க வேண்டியதில்லை. அடிப்படைத் தளத்தில் $(z = o)$, இவ்விசைகள் செயல்படும் புள்ளிகளின் வீழ்ச்சிகள் (projection), (x_1, y_1) (x_2, y_2),...... (x_n, y_n) என்ற புள்ளிகளென்போம். மேலும் Ox, Oy என்ற அச்சுக் கோடுகளின் திசையில் (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),........(X_n, Y_n) என்பன முறையே அவ்விசைகளின் கூறுகளாக (Components) இருக்கட்டும்.

முற்பகுதியில் கண்டவாறு $\delta a, \delta b, \delta\theta$ என்ற மாய இடப் பெயர்ச்சியுறும் போது, புரியப்படுகின்ற பணி δw ஆனால்,

$$\delta w = \sum_{i=1}^{n} X_i\,[\delta a - (y_i - b)\,\delta\theta]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} Y_i\,[\delta b + (x_i - a)\,\delta\theta]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \delta a + \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [(x_i - a) Y_i - (y_i - b) X_i] \delta\theta$$

எனவே,

$$\delta w = X\delta a + Y \delta b + N \delta\theta \qquad (89.1)$$

இதில் (X, Y) என்பன செலுத்தப்பட்ட விசைகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகையின் கூறுகளையும், N என்பது (a, b) என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து அவைகளின் திருப்புத்திறனையும் குறிக்கின்றன.

எனவே, X = O; Y = O; N = O ஆனால், δw = O ஆகும். எனவே மாயப்பணியின் தத்துவப்படி திண்பொருள் சமநிலையிலிருக்க வேண்டுமாயின்

$$X = O; \; Y = O; \; N = O \qquad (89.2$$

ஆக இருக்க வேண்டும். இதுவே பொருள் சமநிலையிலிருத்தற்குப் போதுமான நிபந்தனையாகும்.

எனவே, நிலையான அடிப்படைத் தளத்திற்கிணையாக இயங்கக் கூடிய வரம்புகளுக்குட்பட்ட ஒரு திண்பொருள், அதன் மீது சுழி விசைக்குத் தளச் சமன அமைவுள்ள (plane equipollent to zero) எந்த விசைத் தொகுதி செயல்பட்டாலும் சமநிலையிலிருக்கும். அதாவது அடிப்படைத் தளத்தில் விசைகளின் வீழ்ச்சிகளின் வெக்டார் கூட்டுத் தொகை சுழியாக வேண்டும்; மேலும், இவ்வடிப் படைத் தளத்துக்கு நேர்குத்தான ஏதேனுமொரு கோட்டைப் பொறுத்து அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகையும் சுழியாக வேண்டும்.

சமன்பாடு (89.2)ம், சமன்பாடுகள் (83.9), (83.9) ஆகியவையும் ஒரே மாதிரியானவை. சமன்பாடுகள் (83.8), (83.9) ஆகியவை பொருள் அமைதி நிலையிலிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகள் (necessary Conditions) எனக் கண்டோம். சமன்பாடு (89.2) லிருந்து அவையே போதுமான நிபந்தனைகள் (sufficient Conditions) எனவும் அறிகிறோம்.

S, S என்பன தளச் சமன அமைவுள்ள (plane equipollent), ஒரு திண் பொருளின் மீது செயல்படும் இரு விசைத் தொகுதிகளென்போம். X, Y, N என்பன S, S^1 ஆகிய இரு தொகுதிகளுக்கும் சமமானவையாதலால், சமன்பாடு (89.1) -லிருந்து S -புரியும் பணி δw ஆகவும், S^1 புரியும் பணி δw^1 ஆகவும் இருந்தால்

$$\delta w = \delta w^1 \qquad (89.3)$$

ஆகும்.

எனவே, நிலையியலைப் பொறுத்தவரை அடிப்படைத் தளத்திற்கிணையான இயக்கங்கள் மட்டுமே கொண்ட திண் பொருளின் சமநிலையைப் பொறுத்த ஆய்வுகளில், தளச் சமன அதைவுள்ள (plane equipollent) இரு விசைத் தொகுதிகள் எல்லா விதத்திலும் சமமானவை (equivalent) ஆகும். அதாவது ஒரு தொகுதியை மற்றொன்றால், சம நிலையைக் கெடுக்காமல் பதிலீடு செய்யலாம். குறிப்பாக சம எண் மதிப்புள்ளதும், ஒரே கோட்டில், ஒரே திசையில் செயல்படும் இரு விசைகள் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை அல்லது இணைமாற்றுத் தன்மையுடையவை (equivalent) எனலாம். எனவே, ஒரு விசையை அதன் வினைக் கோட்டின் வழியே இடம் பெயரச் செய்வதால் சமநிலையில் மாற்றமுண்டாகாது. இதனை, ஒரு திண் பொருளைப் பொறுத்தவரை விசையின் இடம் பெயருந் தன்மை (transmissibility of force) என்கிறோம்.

அதே போன்று ஒரு தளத்தில் உள்ள இரு இரு இரட்டைகள், அவைகளின் திருப்புத்திறன்கள் சமமாக இருந்தால் ஒன்றுக் கொன்று இணைமாற்றுத் தன்மை (equivalent) உடையன. எனவே சமன்பாடு (89.1) -லிருந்து, இரட்டையைப் பொறுத்தவரை $X = O$; $Y = O$ ஆதலால்,

$$\delta w = N\,\delta\theta \quad \text{ஆகும்.} \tag{89.4}$$

இதில் N என்பது இரட்டையின் திருப்புத்திறனையும், $\delta\theta$ கோண இடப் பெயர்ச்சியையும் குறிக்கின்றன.

90. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்கக் கணக்கு (1): ஆறு விசைகள் செயல்பட்டு ஒரு துகள் சமநிலையிலுள்ளது. அவற்றுள் மூன்று விசைகளின் திசைகளை மட்டும் எதிர்த் திசைகளாக மாற்றினாலும் பொருள் சம நிலையில் உள்ளது. அம் மூன்று விசைகள் இல்லாவிட்டாலும் துகள் சம நிலையிலிருக்குமெனக் காட்டு.

பொருளின் மீது செயல்பட்டு விசைகள் A, B, C, P, Q, R எனக் கொள்வோம். இவ் விசைகள் செயல்பட்டுத் துகள் சம நிலையிலிருத்தலால்,

$$A+B+C+P+Q+R = O \tag{90.1}$$

இப்போது P, Q, R என்ற விசைகளின் திசைகள் எதிர்த் திசைகளாக மாற்றப்படும் போதும் பொருள் சமநிலையிலிருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்போது,

$$A+B+C-(P+Q+R) = O \tag{90.2}$$

சமன்பாடுகள் (60.1), (90.2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$(P+Q+R) = O$$

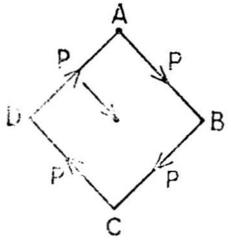
எனக் கிடைக்கிறது. எனவே, P, Q, R என்ற விசைகளை நீக்கி விட்டாலும்

$$(A+B+C) = O$$

ஆதலால் துகள் சம நிலையிலிருக்கும்

விளக்கக் கணக்கு (2): ABCD என்ற சதுரத் தகட்டின் ஒரு முனை A -யில் ஒரு கீல் பொருத்தப்பட்டுத் தகடு அதன் தளத்தில் நகருமாறு உள்ளது. P என்ற மதிப்புக் கொண்ட நான்கு சம விசைகள் சதுரத்தின் நான்கு பக்கங்களிலும் சுற்று வரிசையில் செயல்படுகின்றன. தகட்டின் மையத்தில் AB என்ற பக்கத்திற்கிணையாக ஒரு F என்ற விசை செயல்படும்போது தகடு சம நிலையிலிருந்தால் F -ன் மதிப்பையும், கீலில் தோன்றும் எதிர்வினை விசையையும் கணக்கிடுக.

P என்ற எண் மதிப்புக் கொண்ட நான்கு விசைகள் சதுரத்தின் பக்கங்களில் படத்தில் கண்டவாறு செயல்படுவதாகக் கொள்வோம்.



படம் 90

F என்ற AB -க் கிணையான விசை செயல்பட்டுத் தகடு சம நிலையிலுள்ளது. சதுரத்தின் பக்கமொன்றின் நீளம் $2a$ என்போம்.

A -யைப் பொறுத்த திருப்புத்திறன்களைக் கணக்கிட்டால்

$$Fa-2a\,P-2a\,P = O$$

எனவே, $F = 4P$

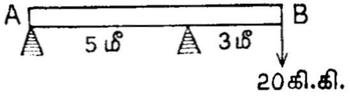
பக்கங்களின் மீது செயல்படும் நான்கு விசைகளையும் இரு இரட்டைகளாகக் கருதுவோமாயின் அவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை $P\times 2a+P\times 2a = 4a\,.\,P$ ஆகும். A -யில் செயல்பட்டு எதிர்வினை விசை R -ன் மதிப்பு $4\,p$- க்குச் சமமாகவும் F -க்கு எதிர்த் திசையிலுமிருந்தால் R, F என்பன $a\,.\,4P$ என்ற திருப்புத்திறனுள்ள (எதிர்த் திசையில்) இரட்டையைத் தோற்றுவிக்

கின்றன. எனவே, தகடு சுழலாமல் சமநிலையிலிருக்கும். ஆதலால் R -ன் மதிப்பு 4P -க்குச் சமமாகவும், அதன் திசை AB -யின் திசையிலும் இருக்க வேண்டும்.

விளக்கக் கணக்கு (3):

AB என்ற 8 மீட்டர் நீளமுள்ள சீரான ஒரு கட்டை A என்ற முனையிலும், B -யிலிருந்து 3 மீட்டர் தொலைவில் உள்ள C - என்ற ஒரு புள்ளியிலும் தாங்கப்பட்டுள்ளது. B -யிலிருந்து கட்டை பிறண்டு விடாமல் தொங்கவிடக் கூடிய மிகப் பெரிய எடை 20 கிலோகிராம் ஆனால், கட்டையின் எடை என்ன?

20 கிலோ கிராம் எடை B -யில் தொங்கும்போது, கட்டை பிறழக் கூடிய நிலையில் உள்ளதால், அந் நிலையில் $R_1 = 0$ ஆகும். எனவே, C -யைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,



படம் 91

$$W \times 1 = 20 \times 3$$

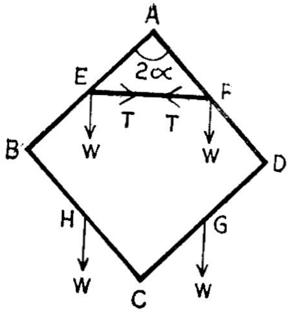
அல்லது, $W = 60$ கிலோ கிராம்.

விளக்கக் கணக்கு (4):

சம எடைகளும், நீளங்களும் கொண்ட நான்கு கோல்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று ஒரு சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களாக அமையுமாறு தடையின்றி இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தச் சாய்சதுரம் ஒரு முனைப்புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சாய் சதுரம் குலைந்து விடாமலிருக்க, மேல் பக்கத்திலுள்ள இரு கோல்களின் மையப் புள்ளிகளுக்கிடையில் ஒரு எடையற்ற தண்டு இணைக்கப் பட்டுள்ளது. தொங்கும் புள்ளியில் சாய் சதுரத்தின் கோணம் $2a$ ஆனால், குறுக்குத் தண்டின்மீது செயல்படும் அழுத்த விசை என்ன?

ABCD என்பது சாய் சதுரத்தைக் குறிக்கட்டும். E, F, G, H என்பன படத்திலுள்ளதுபோல், கோல்களின் மையப் புள்ளிகளைக் குறிக்கட்டும். E F என்பது குறுக்கே இணைக்கப்பட்ட கோலாகும்.

இக் கோலின் மீது செயல்படும் அழுத்த விசை T எனவும், ஒவ்வொரு கோலின் எடையும் (E F -ஐத் தவிர) W எனவும் கொள்வோம். கோணம் $A = 2a$.



படம் 92

இப்போது அடிப்புள்ளி D-யைச் சற்றே உயர்த்தி 2α என்ற கோணம் 2 ($\alpha + d\alpha$) என மாறுமாறு செய்வோம்.

AB = 2a எனக் கொண்டால், E, F என்ற புள்ளிகள் AC-க்கு இணையாக நகரும் தொலைவு $d\,(a \cos \alpha)$ ஆகும். அதேபோல், G, H என்ற புள்ளிகள் AC-க்கு இணையாக நகரும் தொலைவு $d\,(3a \cos \alpha)$ ஆகும். F, F என்ற புள்ளிகள் EF-க்கு இணையாக நகரும் தொலைவு $d\,(a \sin \alpha)$ ஆகும்.

தொகுதி சம நிலையிலிருத்தலால், இந்த மாய இடப்பெயர்ச்சி யால் புரியப்படும் பணி சுழியாக வேண்டும். எனவே,

$$2\ W\, d(a \cos \alpha) + 2\ W\, d\,(3a \cos \alpha) + 2T\, d\,(a \sin \alpha) = 0.$$

எனவே, $8W \sin \alpha = 2\ T \cos \alpha$

அல்லது $T = 4\ W \tan \alpha.$

இதுவே, E F-ன் மீது செயல்படும் அழுத்த விசையாகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்:

1. நான்கு சீரான தண்டுகள் ABCD என்ற சாய் சதுரத்தின் பக்கங்களாக அமையுமாறு முனைகளில் தடையின்றி இணைக்கப்பட் டுள்ளன. A கிடைத்தளத்தின் மீதும் AC செங்குத்தாகவும் உள்ளவாறு இச் சாய்சதுரம் செங்குத்துத் தளத்தில் நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளது. B-யையும், D-யையும் இணைக்கும் எடை யற்ற ஒரு நூல் சாய்சதுரம் குலைந்து விடாமல் தடுக்கிறது. $\angle$BAC என்ற கோணம் θ ஆனல், நூலின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

2. W என்ற எடையுள்ள ஒரு துகள் நிலையான புள்ளி யொன்றிலிருந்து ஒரு நூலால் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது. H என்ற

கிடைத்தள விசை அதன் மீது செயல்படுகிறது. செங்குத்துக் கோட்டிலிருந்து நூல் விலகிய நிலையில் துகள் சம நிலையிலுள்ளது. நூலின் இழுவிசை T_0 -வைவிட அதிகமானால், நூல் அறுந்து விடுமாயின், நூலை அறுக்கக் கூடிய H -ன் சிறிய மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

3. $2b$ நீளமுள்ள எடையற்ற ஒரு தண்டின் முனைகளில் w, W என்ற எடைகள் முறையே தாங்கப்பட்டுள்ளன. இத் தண்டு a ஆரமுள்ள ஒரு உராய்வற்ற அரைக் கோளக் கூட்டினுள் வைக்கப் பட்டுள்ளது. அரைக் கோளக் கூட்டின் விளிம்புத் தளம் கிடைத் தளத்துக்கிணையாகவும், w என்ற எடை விளிம்பருகிலும் இருந்தால்,

$$w\,a^2 = W\,(2b^2 - a^2)$$

எனக் காட்டுக.

4. நான்கு சீரான தண்டுகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கு மாறு தடையின்றி இணைக்கப் பட்டுள்ளன. மூலை விட்டங்களின் வழியே செல்லும் இரு நூல்கள் எதிர் முனைகளை இணைக்கின்றன. இவ்வமைப்பு கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டிருந்தால், அந் நூல் களின் இழுவிசைகள் அவைகளின் நீளங்களின் விகிதத்திலுள்ளன எனக் காட்டுக.

5. ஒரே மாதிரியான நான்கு சீரான தண்டுகள் ஒரு சதுர வடிவில் முனைகளில் தடையின்றி இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு தண்டின் எடை W எனக் கொள்க. சதுர அமைப்பு ஒரு முனையி லிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு மற்ற மூன்று கீழ் முனைகள் ஒவ்வொன்றி லும் W என்ற எடைகள் வைக்கப் பட்டுள்ளன. அமைப்பு குலைந்து விடாமல் கிடைத்தள மூலைவிட்டத்தில் உள்ள ஒரு எடையற்ற தண்டு தடுத்துக் கொண்டுள்ளது. தண்டின் மீது செயல்படும் அழுத்த விசையைக் கணக்கிடுக.

6. a என்ற நீளமுள்ள AB, AC என்ற எடையற்ல இரு தண்டுகள் A என்ற இடத்தில் தடையின்றி இணைக்கப்பங்டுள்ளன. B, C என்ற முனைகளை ஒரு மெல்லிய நூல் இணைக்கிறது C -யிலிருந்து AC -யில் b தொலைவில் W என்ற எடை இணைக்கப் பட்டு, ABC செங்குத்துத் தளத்திலும், B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரு உராய்வற்ற கிடைத் தளத்திலும் உள்ளவாறு A -யின் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச் சீரமைவுடன் (symmetric) உள்ளது. நூலின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

7. எடையற்ற ஐந்து சம நீளமுள்ள தண்டுகள் ஒரு சாய் சதுரம் ABCD, அதன் ஒரு மூலைவிட்டம் BD ஆகியவற்றை அமைக்கும் வண்ணம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. C என்ற புள்ளியில் W என்ற எடை இணைக்கப்பட்டு இத் தொகுதி A என்ற புள்ளியி

லிருந்து தொங்க விடப்பட்டிருந்தால், BD -யின் மீது அழுத்த விசை $\frac{W}{\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

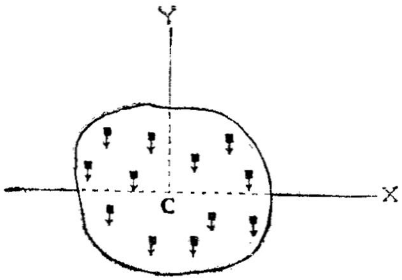
8. AB, AC என்ற சம நீளம் $2b$ உள்ள இரு சீரான தண்டுகள் A என்ற முனையில் தடையின்றி இணைக்கப்பட்டு, a ஆரமுள்ள ஒரு உராய்வற்ற செங்குத்து வட்டத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளன. தண்டுகளின் இடைக் கோணம் 2ϕ ஆனால், $b \sin^3 \phi = a \cos \phi$ எனக் காட்டுக.

9. AB, AC என்ற இரு சீரான தண்டுகள் முறையே 3 மீட்டர், 4 மீட்டர் நீளங்களுடையன. A என்ற முனையில் அவை தடையின்றி இணைக்கப்பட்டும், B, C என்ற முனைகள் ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீதும் உள்ளன. தண்டுகள் செங்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டு அவற்றின் மையப் புள்ளிகள் 2.5 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு நூலால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. தண்டுகள் ஓரலகு நீளத்திற்கு W என்ற எடை கொண்டவை யானால், நூலின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

9 1. புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity)

திண்பொருட்களின் இயக்கங்களில், நாம் அடிக்கடி எதிர் கொள்ளும் விசைகளிலொன்று புவியீர்ப்பு விசையாகும் (force of gravity). ஒரு பொருளின் மீது செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை உண்மையில் பல விசைகளின் தொகுபயனே (resultant) யாகும். எந்தப் பொருளையும் பல சிறு துகட்களின் தொகுதியாகக் கருதலாம். அத்தகைய துகளொன்றின் நிறை m_i எனக் கொண்டால், அத் துகளின் மீது புவி செலுத்தும் ஈர்ப்பு விசை $m_i \vec{g}$ ஆகும். இது புவி மையத்தை நோக்கிய விசையாகும். ஒரு இடத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $\vec{g}$ -யின் எண் மதிப்பும், திசையும் மாருதிருந்தால், அந்த இடத்தில் புவியீர்ப்பு முடுக்கம் $\vec{g}$ சீரான தென்கிறோம். $\vec{g}$ சீரானதாக உள்ளபோது M நிறையுள்ள திண் பொருளின் துகள்களின் மீது செயல்படும் எல்லா விசைகளையும் நிறை மையத்தின் (centre of mass) வழியே செயல்படுகின்ற $M\vec{g}$ என்ற ஒரு விசையாகத் தொகுத்துக் கூற இயலும்.

நிறை மையத்தினை ஆயக் கோடுகளின் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொள்வோம் திண் பொருளில் n துகள்கள் உள்ளன எனக் கொள்வோம். ஏதேனுமொரு துகளின் நிறை m_i எனவும், அத் துகளின் x -ஆயம் x_i எனவும் கொண்டால், நிறை மையத்தின்



படம் 93

வழியே செல்லும் z –அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்துப் புவியீர்ப்பு விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை,

$$T_z = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \dots\dots + m_n g x_n$$
$$= \sum m_i g x_i$$
$$= g \sum m_i x_i.$$

ஆகும். பகுதி (75) -ல் நிறை மையத்தின் வரையறைப்படி x_0 இப்போது சுழியாதலால், (நிறை மையமே ஆயத் தொடக்கமாக உள்ளதால்) $\sum m_i x_i$ சுழியாகும். எனவே, $T_z = 0$; இதேபோல், T_x, T_y என்ற முறையே நிறை மையத்தின் வழியே செல்லும் x, y அச்சுக் கோடுகளைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களும் தனித்தனியே சுழியாகும்.

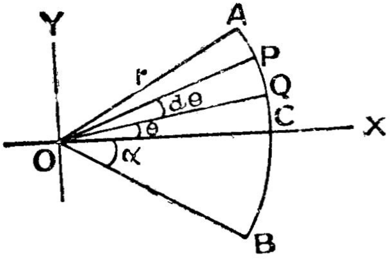
புவியீர்ப்பு மையமென்பது (centre of gravity) திண்பொருள் எந் நிலையிலிருப்பினும், அதன் துகள்களின் மீது செயல்படுகின்ற விசைகளின் தொகுபயன் எந்தப் புள்ளியின் வழியாகச் செயல் படுகின்றதோ அந்தப் புள்ளியைக் குறிக்கும். புவியீர்ப்பு முடுக்கம் சீரானதாக இருந்தால், புவியீர்ப்பு மையமும், நிறை மையமும் ஒன்றேதான்.

ஒரே திண்பொருளின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் புவியீர்ப்பு முடுக் கத்தின் திசையோ எண்மதிப்போ மாறுபட்டிருந்தால், புவியீர்ப்பு மையமும் நிறை மையமும் ஒன்றாக இருக்காது. பின்வரும் பகுதி களில் நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் பொருள்கள் புவியின் உருவு அளவு டன் ஒப்பிடுகையில் மிகமிகச் சிறியனவாதலால், g-யின் மதிப்பு மாறுவதில்லை எனக் கொள்வோம்.

92. வட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of an arc of a circle)

ACB என்ற படத்தில் கண்டவாறு $(x—y)$ தளத்திலுள்ள ஒரு சீரான வட்டவில் எனக் கொள்வோம். x - அச்சுக் கோட்டைப்

பொறுத்து வட்டவில் சமச் சீருள்ளவாறு (symmetric) எடுத்துக் கொள்வோம். மேலும் ஆயத் தொடக்கப்புள்ளி வட்ட மையமாக



படம் 94

வும் இருக்கட்டும். வட்டவில் அதன் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 2α எனவும், ஓரலகு நீள எடை (weight per unit length) ρ எனவும் கொள்வோம்.

வட்ட வில்லின் அமைப்பு x -அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச் சீருடையதாகையால், புவியீர்ப்பு மையம் OC என்ற கோட்டில் தான் இருக்க வேண்டும்.

PQ என்ற வட்ட வில்லின் ஒரு சிறு பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். படத்திலிருந்து வட்ட ஆரம் r ஆனால்,

$$PQ = r\,d\theta \qquad (92.1)$$

இதில் $d\theta$ என்பது PQ வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம். எனவே,

$$PQ \text{ வின் எடை} = \rho r\,d\theta \qquad (92.2)$$

y அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து இதன் திருப்புத்திறன்

$$= \rho r\,d\theta \,.\, r\cos\theta$$
$$= \rho r^2 \cos\theta\, d\theta$$

எனவே, y -அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து வட்ட வில்லின்

$$\text{திருப்புத்திறன்} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho r^2 \cos\theta\, d\theta$$

(வட்ட வில்லுக்கு θ -வின் மதிப்பு $-\alpha$ விலிருந்து $+\alpha$ வரை மாறுகிறது.)

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho\, r^2 \cos\theta\, d\theta = \rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2 \cos\theta\, d\theta$$
$$= 2\, r^2\, \rho \sin\alpha$$

O -விலிருந்து புவியீர்ப்பு மையம் x -தொலைவிலிருந்தால்

$$2\,r^2\,\rho\,\sin a = x\int_{-a}^{+a}\rho\,r\,d\theta$$

$$= 2\,x\,\rho\,r\,a$$

$$\therefore \qquad x = \frac{r\sin a}{a} \qquad (92.3)$$

இதுவே புளியீர்ப்பு மையத்தின் x -ஆயமாகும். எனவே, சீரான வட்ட வில்லின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் மையத்தையும், இணைக்கும் கோட்டில் வட்ட மையத்திலிருந்து $\left(\frac{r\sin a}{a}\right)$ தொலைவில் உள்ளது.

93. வட்ட ஆரப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a sector of a Circle)

OAB என்பது ஒரு வட்ட ஆரப்பகுதி (sector of a Circle) யென் போம். (படம் 94). ρ என்பது அப் பகுதியின் ஓரலகுப் பரப்பின் எடை யெனக் கொள்வோம். இப்போது OPQ என்ற சிறு பகுதி யின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\,.\,r\,.\,r\,d\theta = \frac{1}{2}\,r^2\,d\theta$ (OPQ -வை PQ மிகச் சிறிய தாகையால் ஒரு முக்கோணமாகக் கருதலாம்.) எனவே, OPQ என்ற சிறு பரப்பின் எடை $= \frac{\rho\,r^2\,d\theta}{2}$

OPQ -வின் புவியீர்ப்பு மையம் O -விலிருந்து $\frac{2}{3}\,r$ தொலைவி லிருக்கும். எனவே, OY -ஐப் பொறுத்து OPQ -வின் எடையின் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{2}{3}\,r\cos\theta.\frac{\rho\,r^2\,d\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\,\rho\,r^3\cos\theta\,d\theta$$

எனவே, OY -யைப் பொறுத்து OAB -யின் திருப்புத்திறன்

$$= \int_{-a}^{+a}\frac{1}{3}\,\rho\,r^3\cos\theta\,d\theta$$

$$\text{OAB -யின் எடை} = \int_{-a}^{+a} \frac{\rho\, r^2\, d\theta}{2}$$

$$= \rho\, r^2\, a$$

ஆதலால், புவியீர்ப்பு மையம் OY -யிலிருந்து x தொலைவிலிருந்தால், OY -ஐப் பொறுத்து OAB -யின் எடையின் திருப்புத்திறன்

$$= x\, \rho\, r^2\, a$$

எனவே,

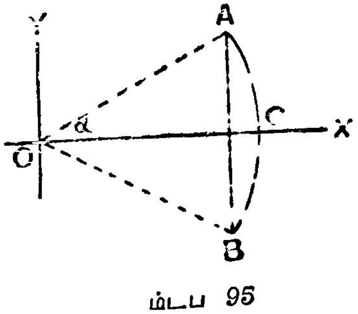
$$x\, \rho\, r^2\, a = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{3}\, \rho\, r^2 \cos\theta\, d\theta$$

அல்லது, $$x = \frac{2\, r \sin a}{3a} \qquad (93.1)$$

மேலும் OAB, Ox -ஐப் பொறுத்துச் சமச்சீருடையதாகையால், புவியீர்ப்பு மையம் O -விலிருந்து $x = \dfrac{2\, r \sin a}{a}$ என்ற தொலைவில் OC -யின் மீது இருக்கும்.

94. வட்டவில் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a segment of a Circle)

ABC என்ற வட்டவில் பகுதி (segment of a Circle) யின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்போம். இந்த வட்டவில் பகுதி,



படம் 95

ACBO என்ற வட்ட ஆரப்பகுதி (sector) ABO என்ற முக்கோணப் பகுதி ஆகியவற்றின் வேறுபாட்டுக்குச் சமம்

OC என்ற கோட்டைப் பொறுத்து ABC சமச் சீருடையதாகை யால், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் OC -யின் மீது இருக்க வேண்டும்.

வட்ட ஆரப் பகுதி AC BO -வின் எடை

$$w = \rho r^2 a \tag{94.1}$$

அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவு (O விலிருந்து)

$$x = \frac{2 r \sin a}{3a} \tag{94.2}$$

முக்கோணம் ABO -வின் எடை

$$w_1 = \frac{1}{2} \rho r^2 \sin 2 a \tag{94.3}$$

O -விலிருந்து அதன் புவியீர்ப்பு மையம் x_1 தொலைவிலிருந்தால்,

$$x_1 = \frac{2}{3} r \sin a \tag{94.4}$$

எனவே, வட்டவில் பகுதி ABC -யின் எடை

$w_2 = w - w_1$ ஆதலால்,

$$w_2 \rho r^2 (a - \tfrac{1}{2} \sin 2a) \tag{94.5}$$

அதன் புவியீர்ப்பு மையம் O -விலிருந்து x_2 தொலைவில் உள்ள தாகக் கொண்டோமானால்,

$$wx = w_1 x_1 + w_2 x_2 \tag{94.6}$$

ஆதலால், சமன்பாடுகள் (94.1), (94.2), (94.3), (94.7) (94.5), (94.6) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\tfrac{1}{2} \rho r^2 \sin 2 a \times \tfrac{2}{3} r \cos a + \rho r^2 (a - \tfrac{1}{2} \sin 2a)\, x^2$$

$$= \rho r^2 a \frac{2 r \sin a}{3a}$$

$$\left(a - \frac{1}{2} \sin 2 a\right) x_2 = \frac{2 r}{3} \sin a \,[1 - \cos^2 a]$$

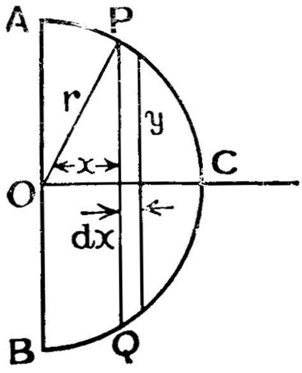
$$= \frac{2 r}{3} \sin^3 a$$

எனவே, $$x_2 = \frac{4 r \sin^3 a}{3 (2a - \sin 2a)} \tag{94.8}$$

இதுவே OC -யின் மீது, O -விலிருந்து வட்டவில் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவாகும்.

95. அரைக் கோளத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a solid hemisphere)

ABC என்பது அரைக் கோளத்தின் மையப்புள்ளி O-வின் வழியே செல்லும் செங்குத்துத் தள வெட்டுப் பரப்பைக் குறிக்கிறது.



படம் 96

சமச் சீரமைவின் காரணமாக இதன் புவியீர்ப்பு மையம் OC யின் மீது இருக்க வேண்டும். கோள ஆரம் r எனவும் அடர்த்தி ρ எனவும் கொள்வோம்.

அரைக் கோளத்தை PQ போன்ற OC-க்கு நேர்குத்தான தளங்கள் கொண்ட பல சிறு வட்டத் தட்டுகளாகப் பிரிக்கலாம். PQ O-விலிருந்து x-தொலைவில் உள்ளதாகவும், அத்தகட்டின் ஆரம் y-எனவும், அதன் தடிப்பு dx எனவும் கொண்டால், PQ என்ற வட்டத் தகட்டின் எடை $\pi y^2 \, dx \, \rho g$ ஆகும்.

$$\pi y^2 \, dx \, \rho g = \pi \rho g \, (r^2 - x^2) \, dx$$

O வைப் பொறுத்து PQ என்ற தட்டின் எடையின் திருப்புத்திறன்

$$= \pi \rho g \, x \, (r^2 - x^2) \, dx$$

இதேபோன்று O-வைப் பொறுத்து எல்லா வட்டத்தட்டுகளின் எடைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன்

$$= \int_0^r \pi \rho g \, x \, (r^2 - x^2) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \pi \rho g \, r^4$$

அரைக் கோளத்தின் பருமன் $= \frac{2}{3} \pi r^3$

எனவே, அதன் எடை $= \frac{2}{3} \pi r^3 \rho g$

இது அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செயல்படுமாதலால், O -விலிருந்து புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவு OC -யின் மீது x_0 ஆக இருந்தால், O -வைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்

$$= \frac{2}{3} \pi r^3 \rho g x_0 \text{ ஆகும்.}$$

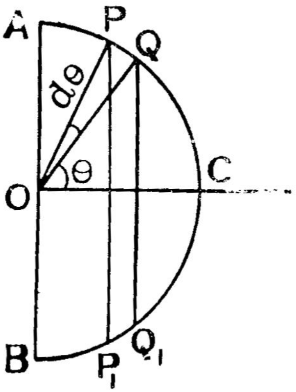
எனவே, $\frac{2}{3} \pi r^3 \rho g x_0 = \frac{1}{4} \pi r^4$

அல்லது, $x_0 = \frac{4}{8} r$ (95.1)

எனவே, அரைக் கோளத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் கோள மையப்புள்ளியிலிருந்து வெட்டு முகத்துக்கு (AB நேர்க்குத்தான கோட்டில் (CC) $\frac{3}{8} r$ தொலைவிலிருக்கும்.

96. உள்ளீடற்ற அரைக் கோளக் கூட்டின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a hollow hemisphere)

படம் கோள மையத்தின் வழியே அரைக் கோளக் கூட்டின் செங்குத்து வெட்டு முடுக்கத்தைக் காட்டுகிறது. OC என்ற ஆரத்தைப் பொறுத்து அரைக் கோளக் கூடு சமச் சீருடையதாத



படம் 97

அதன் புவியீர்ப்பு மையம் OC -யின் மீது இருக்கும். கோளத்தின் ஆரம் r எனவும், கூட்டின் ஓரலகு பரப்பின் எடை (weight of unit area) ρ எனவும் கொள்வோம். அரைக் கோளத்தை AOB என்ற தளத்துக்கிணையான பல தளங்களால் சிறு சிறு வளையங்களாகப் பிரிக்கலாம். $PQ\,Q_1P_1$ என்பது இத்தகைய வளையங்களிலொன்று. PQ - வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $d\theta$ எனவும், $\angle QOC = \theta$ எனவும் கொள்வோம்.

$PQ\,Q_1P_1$ என்ற வளையத்தின் பரப்பு

$$= 2\pi\,(r\sin\theta)\,.\,PQ$$

$$= 2\pi\, r^2 \sin\theta\, d\theta$$

எனவே, அதன் எடை $= 2\pi\,\rho r^2 \sin\theta\, d\theta$

அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வளையத்தின் மையப் புள்ளியில் O விலிருந்து $(r\cos\theta)$ என்ற தொலைவில் இருக்குமாதலால், O -வைப் பொறுத்து அதன் எடையின் திருப்புத்திறன்

$$= 2\pi\,\rho r^2 \sin\theta\,.\,r\cos\theta\, d\theta$$

$$= \pi\,\rho\, r^3 \sin 2\theta\, d\theta$$

இது போன்று அரைக் கோளத்தின் எல்லா வளையங்களின் எடைகளின் O -வைப் பொறுத்த திருப்புத்திறன்

$$= \int_0^{\pi/2} \pi\,\rho r^3 \sin 2\theta\, d\theta$$

$$= \pi\,\rho\, r^3$$

அரைக் கோளத்தின் மொத்த எடை

$$= \int_0^{\pi/2} 2\pi\,\rho\, r^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi r^2\,\rho.$$

அதன் புவியீர்ப்பு மையம் O -லிருந்து OC -யின் மீது x தொலைவி லிருந்தால், O -வைப் பொறுத்து அதன் எடையின் திருப்புத் திறன்

$$= 2\pi r^2\,\rho . x$$

எனவே,

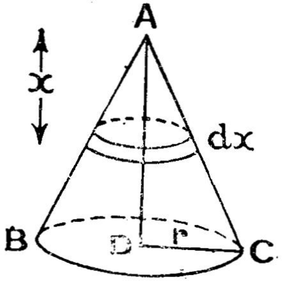
$$2\pi r^2\,\rho x = \pi r^3\,\rho$$

$$x = \frac{r}{2} \qquad (96.1)$$

எனவே, அரைக் கோளக் கூட்டின் புவியீர்ப்பு மையம், கோள மையத்திலிருந்து சமச்சீர் ஆரத்தின் மீது $\frac{r}{2}$ தொலைவில் உள்ளது.

97. நேர் வட்டக் கூம்புத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a solid right circular cone)

நேர் வட்டக் கூம்பின் உயரம் h எனவும், உச்சிக் கோணம் 2α எனவும் அதன் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் r எனவும் கொள்வோம். கூம்பை அடிப்பக்கத்துக்கு இணையான பல தளங்களால், சிறு சிறு



படம் 98

வட்டத் தகடுகளாகப் பிரிக்கலாம். கூம்பின் உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து x ஆழத்தில் உள்ள dx தடிப்புள்ள PQ என்ற வட்டத் தட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் ஆரம் $= x \tan \alpha$ ஆதலால், அதன் பருமன் $= \pi r^2 \tan^2 \alpha \, dx$.

கூம்பின் ஓரலகுப் பருமனின் எடை ρ என்போம். ($\rho =$ அடர்த்தி $\times g$).

எனவே, PQ -வின் எடை $= \pi \rho x^2 \tan^2 \alpha \, dx$.

A -யைப் பொறுத்து PQ -வின் எடையின் திருப்புத் திறன்

$$= \pi \rho x^3 \tan^2 \alpha \, dx$$

எனவே, A -யைப் பொறுத்து, கூம்பின் எல்லா வட்டத் தட்டு களின் எடைகளின் திருப்புத் திறன் $= \int_0^h \pi \rho x^3 \tan^2 \alpha \, dx$

$$= \frac{h^4}{4} \pi \rho \tan^2 \alpha$$

கூம்பின் மொத்த எடை

$$= \int_0^h \pi \rho\, x^2 \tan^2 \alpha$$

$$= \frac{h^3}{3}\ \pi \rho \tan^2 \alpha$$

A -யிலிருந்து கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் x_0 என்ற ஆழத்தி லிருந்தால், A -யைப் பொறுத்துக் கூம்பின் எடையின் திருப்புத் திறன் $= \frac{h^3}{4} \pi \rho \tan^2 \alpha\ x_0$

எனவே,

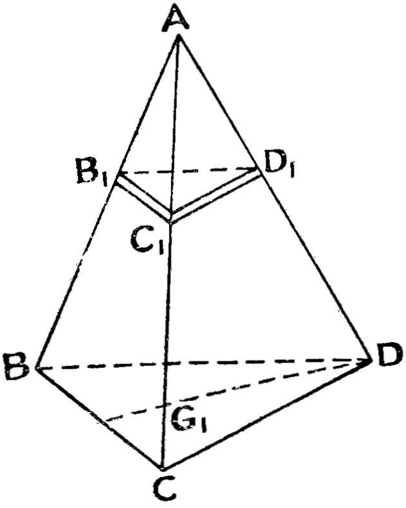
$$\frac{h^3}{3} \pi \rho \tan^2 \alpha\ x_0 = \frac{h^4}{4}\ \pi \rho \tan^2 \alpha$$

$$\therefore \qquad x_0 = \frac{3}{4} h \qquad (97.1)$$

எனவே, கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம், கூம்பின் உச்சிப் புள்ளியி லிருந்து, அடித்தளத்துக்கு நேர்க்குத்துக் கோட்டில், $\frac{3}{4} h$ தொலை வில் உள்ளது.

98. நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a tetrahedron)

ABCD என்ற நான்முகத் திண்மத்தைக் காண்போம். A என்பது அதன் உச்சிப் புள்ளியாகவும், BCD என்பது அதன்



படம் 99

அடிப்பக்க முக்கோணமாகவும் இருக்கட்டும். $\triangle BCD$ -யின் புவி யீர்ப்பு மையம் G_1 எனக் கொள்வோம்.

நான் முகத் திண்மத்தை $\triangle BCD$ -க்கு இணையான பல தளங் களால், $B_1C_1D_1$ போன்ற பல சிறு தட்டுகளாகப் பிரிப்போம். இத்தகைய முக்கோணத் தட்டுகளின் புவியீர்ப்பு மையங் களனைத்தும் AG_1 என்ற கோட்டில் இருக்கின்றன. எனவே, நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் AG_1 என்ற கோட்டில் இருக்கும்.

$B_1C_1D_1$ என்ற தகட்டினை நோக்குவோம். dx என்பது அதன் தடிப்பு எனவும், A -யிலிருந்து அதன் ஆழம் x எனவும், BCD -யிலிருந்து A -யின் உயரம் நான்முகத் திண்மத்தின் உயரம்) h எனவும் கொண்டால்,

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$$

$\triangle BCD$ -யின் உயரம் (BC -க்கு D யிலிருந்து வரையப்படும் நேர்க் குத்துக் கோட்டின் நீளம்) a எனவும், $\triangle B_1C_1D_1$ -ன் உயரம் a_1 எனவும் இருந்தால்,

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{a_1}{a} \text{ ஆகும்.}$$

$$\triangle BCD \text{ -யின் பரப்பு} = \tfrac{1}{2}\, BC \,.\, a$$

$$\triangle B_1C_1D_1 \text{ -யின் பரப்பு} = \tfrac{1}{2}\, B_1C_1 \,.\, a_1$$

எனவே,
$$\frac{\triangle B_1C_1D_1 \text{ -யின் பரப்பு}}{\triangle BCD \text{ -யின் பரப்பு}} = \frac{B_1C_1 \,.\, a_1}{BC \,.\, a}$$

$$= \left(\frac{B_1C_1}{BC}\right)^2$$

$$= \frac{x^2}{h^2}$$

எனவே, $\triangle B_1C_1D_1$ -ன் பரப்பு $= \frac{x^2}{h^2} \triangle BCD)$ யின் பரப்பு

$\triangle BCD$ -யின் பரப்பு S எனக் கொண்டால்,

$$\triangle B_1C_1D_1 \text{ -யின் பருமன்} = \frac{x^2}{h^2} \,.\, S.dx$$

ρ – என்பது ஓரலகுப் பருமனின் எடையாக இருப்தால்,

$$B_1C_1D_1 \text{ -யின் எடை} = \rho.\, \frac{x^2}{h^2}\, S.dx.$$

A -யைப் பொறுத்து இதன் திருப்புத் திறன்

$$= \rho . \frac{x^2}{h^2} S.dx.x$$

$$= \frac{\rho S}{h^2} x^3 dx.$$

எனவே, இதுபோன்ற எல்லா முக்கோணத் தட்டுகளின் எடைகளின் A -யைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்

$$= \int_0^h \frac{\rho S}{h^2} x^3 dx$$

$$= \frac{\rho S h^2}{4}$$

நான்முகத் திண்மத்தின் மொத்த எடை

$$= \int_0^h \frac{\rho S}{h^2} x^2 dx$$

$$= \frac{\rho S h}{3}$$

A -யிலிருந்து நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் x_0 ஆழத்திலிருந்தால், A -யைப் பொறுத்து அதன் எடையின்

திருப்புத் திறன் $= \frac{\rho S h}{3} . x_0$

எனவே, $\frac{\rho S h}{3} x_0 = \frac{\rho S h^2}{4}$

$$x_0 = \frac{3}{4} h \quad (98.1)$$

எனவே, நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் உச்சிப் புள்ளியிலிருந்து $\frac{3}{4}$ h ஆழத்தில் இருக்கும். ஆனல், அது AG_1 என்ற கோட்டின் மீது இருக்க வேண்டுமாதலால், புவியீர்ப்பு மையம் G, AG_1 என்ற கோட்டை

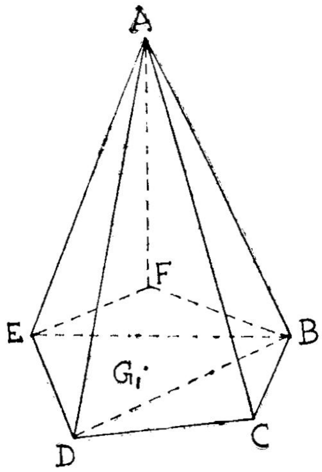
$$AG : GG_1 = 3 : 1 \quad (98.2)$$

என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

99. பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் (Centre of gravity of a pyramid)

A என்பது பட்டைக் கூம்பின் (pyramid) உச்சிப்புள்ளியாகவும், BCDEF என்பது அதன் அடிப்பக்கமாகவும் இருக்கட்டும். இந்த அடிப்பக்கத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 ஆக இருந்தால், பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் AG_1 என்ற கோட்டின் மீது இருக்க வேண்டும்.

பட்டைக் கூம்பின் அடித் தளத்தைப் படத்தில் கண்டவாறு, பல முக்கோணப் பரப்புகளாகப் பிரிக்கலாம். எனவே, பட்டைக் கூம்பை, இம் முக்கோணப் பரப்புகளின் மீது நான்முகத் திண்மங்



படம் 100

களாகக் கருதலாம். பட்டைக் கூம்பின் உயரம் (அடித்தளத்து A -யிலிருந்து வரையப்படும் நேர்க்குத்துக் கோட்டின் நீளம்) h ஆனல், ஒவ்வொரு நான் முகத் திண்மத்தின் உயரமும் h ஆகும். ஒவ்வொரு நான்முகத் திண்மத்தின் புவியீர்ப்பு மையமும் A யிலிருந்து $\frac{3}{4}$ h ஆழத்தில் இருக்க வேண்டுமாதலால், பட்டைக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையமும் A -யிலிருந்து $\frac{3}{4}$ h ஆழத்திலுள்ள தளத்தில் தான் இருக்கும். ஆனல், அது AG_1 என்ற கோட்டின் மீது இருக்க வேண்டுமாதலால், புவியீர்ப்பு மையம் G என்ருல், G என்ற புள்ளி AG_1 -ஐ

$$AG : GG_1 = 1 : 3 \qquad (99.1)$$

என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

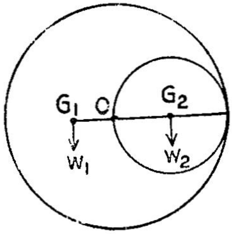
அடித் தளத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைப் பெருமளவில் அதிகரித்தாலும், மேற்கூறியவை பொருந்தும். இவ்வாறு மிகக் குறுகிய நீளங்கள் கொண்ட எண்ணற்ற பக்கங்கள் கொண்ட அடித் தளத்தையுடைய ஒரு பட்டைக் கூம்பு, ஒரு சாதாரணக் கூம்பினை யொத்ததாகும். எனவே, சாதாரணக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையமும் சமன்பாடு (99.1) -ன்படி அமைந்திருக்கும்.

100. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்கக் கணக்கு (1):

r ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திலிருந்து, அதனுடைய ஒரு ஆரத்தை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் வெட்டி யெடுக்கப்பட்டுள்வது. மீதமுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

வட்டங்களின் பரப்புக்கள் அவைகளின் ஆரங்களின் இருமடிகளுக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்க வேண்டுமாதலால், வெட்டியெடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் பரப்பு முழு வட்டத்தின் பரப்பில் $\frac{1}{4}$ பங்காகும்.



படம் 101

எனவே, மீதமுள்ள பகுதியின் எடை W_1 எனவும், வெட்டியெடுக்கப்பட்ட பகுதியின் எடை W_2 எனவும் கொண்டால், $W_1 = 3W_2$ ஆகும்.

முழு வட்டத்தின் புவியீர்ப்பு மையம், வட்ட மையம் O -வில் இருக்க வேண்டுமாதலால், O -வைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$W_1 . OG_1 = W_2 . OG_2$$

எனவே,
$$OG_1 = OG_2 . \frac{W_2}{W_1}$$

$$= \frac{1}{3} . \frac{1}{2} r$$

$$= \frac{r}{6}$$

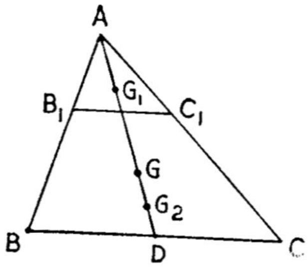
எனவே, முழு வட்ட மையத்திலிருந்து G_1 ஆவது $\frac{r}{6}$ என்ற தொலைவில் உள்ளது.

விளக்கக் கணக்கு (2):

ABC என்ற முக்கோணப் பரப்பிலிருந்து BC -க்கு இணையான B_1C_1 என்ற கோட்டின் வழியே அதன் பரப்பில் கால் பகுதி வெட்டியெடுக்கப் பட்டுள்ளது. மீதமுள்ள பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க

$$\frac{\triangle AB_1C_1}{\triangle ABC} = \frac{1}{4}$$

இரு முக்கோணங்களும் வடிவொற்தவை யாதலால்,



படம் 102

$$\frac{\triangle AB_1C_1}{\triangle ABC} = \frac{AB_1^2}{AB^2}$$

எனவே, $$\frac{AB_1^2}{AB^2} = \frac{1}{4}$$

அல்லது, $$AB = 2\,AB_1$$

எனவே, B_1C_1 என்ற கோடு AB, AD, AC ஆகிய கோடுகளை இரண்டு சம பாகங்களாக வெட்டுகிறது.

$\triangle$ ABC -யின் புவியீர்ப்பு மையம் G எனவும், $\triangle AB_1C_1$ -யின் புவியீர்ப்பு மையம் G_1 எனவும் கொள்வோம். W_1 என்பது வெட்டியெடுக்கப்பட்ட பகுதியின் எடையாகவும், W_2 மீதமுள்ள பகுதியின் எடையாகவும் இருந்தால்,

$$W_2 = 3W_1.$$

எனவே, $$DG = \frac{W_1.DG_1 + W_2.DG_2}{W_1 + W_2}$$

$$= \frac{DG_1 + 3\,DG_2}{4}$$

ஆனால், $DG = \frac{1}{3} DA = \frac{2}{3} DD_1$ ஆதலால்,

$$DG_1 = DD_1 + \frac{1}{3} D_1 A$$

$$= DD_1 + \frac{1}{3} DD_1 = \frac{4}{3} DD_1$$

எனவே, $DG = \dfrac{DG_1 + 3\,DG_2}{4}$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$4 \times \frac{2}{3} DD_1 = \frac{4}{3} DD_1 + 3\,DG_2$$

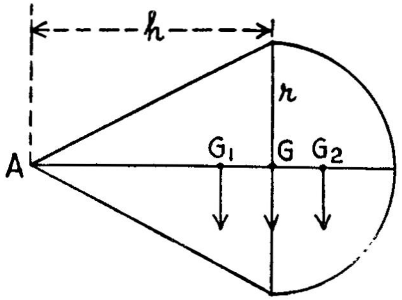
எனவே, $DG_2 = \dfrac{4}{9} DD_1$

இதிலிருந்து G_2 -வின் இருப்பிடத்தை யறியலாம்.

விளக்கக் கணக்கு (3):

ஒரு கூம்புத் திண்மமும், ஒரு அரைக் கோளத் திண்மமும் ஒரு பொதுவான வட்டத் தளத்தின் மீது அமைந்துள்ளன. இத் தளத்தின் மையத்தில் முழுப் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் இருக்க வேண்டுமாயின், கூம்பின் உயரத்துக்கும், ஆரத்திற்குமிடையே யுள்ள தொடர்பு என்ன?

r என்பது ஆரமாகவும், **h** என்பது கூம்பின் உயரமாகவும் இருக்கட்டும். ρ என்பது ஓரலகுப் பருமனின் நிறையானல்,



படம் 103

கூம்பின் நிறை $= \frac{1}{3}\pi r^2 h\,\rho$

அரைக் கோளத்தின் நிறை $= \frac{2}{3}\pi r^3 \rho$.

D என்பது பொது வட்டத்தின் மையப் புள்ளியையும், G_1 என்பது கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும், G_2 அரைக் கோளத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் குறிக்கட்டும்.

ஆதலால், A என்பது கூம்பின் முனையானால்,

$$AG_1 = \frac{3}{4}h\,; \quad AG_2 = h + \frac{3}{8}r$$

கூட்டு அமைப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் A -யிலிருந்து x என்ற தொலைவிலிருந்தால், A -யைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\rho + \frac{2}{3}\pi r^3 \rho\right)x$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h\,\rho.\frac{3}{4}h + \frac{2}{3}\pi r^3\,\rho.\left(h + \frac{3}{8}r\right)$$

$$\therefore \quad (h + 2r)x = \frac{3}{4}h^2 + 2rh + \frac{3}{4}r^2$$

ஆனால், $x = h$ ஆக வேண்டு மாதலால்,

$$4h^2 + 8rh = 3h^2 + 8rh + 3r^2$$

அல்லது $h^2 = 3r^2$

எனவே, $\frac{h}{r} = \sqrt{3}$

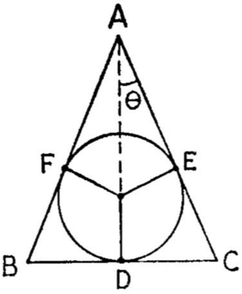
எனவே, கூம்பின் உயரத்துக்கும், ஆரத்திற்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் $\sqrt{3}$ -க்குச் சமமாக இருந்தால், கூட்டமைப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் பொது வட்டத் தளத்தின் மையப் புள்ளியில் இருக்கும்.

விளக்கக் கணக்கு (4):

ஒரு கூம்பு வடிவத் திண்மத்தின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரம் $\sqrt{2}$ செ.மீ. ஆகவும், உயரம் 4 செ.மீ. ஆகவும் உள்ளது. அக் கூம்பிலிருந்து முடிந்த அளவு பெரிய கோளத்தை வெட்டி யெடுத்த பின்பு மீதமுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம், முழுக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையத்திலேயே இருக்குமெனக் காட்டுக.

ABC என்பது கூம்பின் குறுக்கு வெட்டுத் தோற்றத்தையும், G என்பது வெட்டி யெடுக்கப் பட்ட கோளத்தின் மையத்தையும் குறிக்கட்டும்.

மீதமுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையமும், கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒரே புள்ளியிலுள்ளன. எனவே, வெட்டி யெடுக்கப் பட்ட கோளத்தின் மையம் G -யும் அதே புள்ளியில் இருக்க



படம் 104

வேண்டும். மேலும், இந் நிலையில் AB, AC, BC என்ற கோடுகள் கோளத்தின் தொடுகோடுகளாக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, GD = GE = GF = r (என்க)

அடிப்பக்க ஆரம் BD = DC $\sqrt{2}$ செ மீ.

கோளத்தின் உயரம் = 4 செ.மீ.

கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் θ ஆனால், △AFG -யில்

$$\sin\theta = \frac{FG}{AG} = \frac{r}{4-r}$$

△ ABD -யில்

$$\sin\theta = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+16}} = \frac{1}{3}$$

ஆதலால், $\frac{r}{4-r} = \frac{1}{3}$

எனவே, r = 1 செ.மீ.

∴ DG = 1 செ.மீ. = $\frac{1}{4}$AD

பயிற்சிக் கணக்குகள் :

(1) ஒரு கூம்பின் அடிப் பக்கத்துடன் அதே ஆரமுள்ள ஓர் உருளை இணைக்கப் பட்டுள்ளது. இந்தக் கூட்டமைப்பின் புவியீர்ப்பு மையம் பொது வட்டத் தளத்தின் மையப் புள்ளியாக இருந்தால், அவைகளின் உயரங்களின் விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

(2) ஒரு கூம்பும், அதே பொருளாலான ஒரு அரைக்கோளமும், அவற்றின் வட்டத் தளங்கள் ஒன்ருக உள்ளவாறு இணைக்கப் பட்டுள்ளன. அரைக்கோளத்தின் ஆரம், கூம்பின் உயரத்துக்குச் சமமானால், அக் கூட்டமைப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

(3) சீரான கம்பியொன்று ஒரு வட்ட வில் வடிவில் வளைக்கப் பட்டு வில்லின் முனைகள் அதேபோன்ற ஒரு நேரான கம்பியால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் வமைப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

(4) ஒரு கூம்பின் அடிப் பக்கத்திலிருந்து, அதே அடிப்பக்கத் தைக் கொண்ட மற்றொரு கூம்பு வெட்டி யெடுக்கப்படுகிறது. மீத முள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம், வெட்டி யெடுக்கப்பட்ட பகுதியின் மேல் முனை இருந்த இடத்தில் இருக்க வேண்டுமானால், வெட்டி யெடுக்கப்பட்ட கூம்பின் உயரம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

(5) 60° உச்சிக் கோணமுள்ள ஒரு கூம்பிலிருந்து முடிந்த அளவு பெரிய கோள மொன்று வெட்டியெடுக்கப்பட்டுள்ளது. மீதி யுள்ள பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் அச்சுக் கோட்டைப் 11:49 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமெனக் காட்டுக

(6) h உயரமும், r ஆரமும் கொண்ட ஓர் உருளை ஒரு சாய் தளத்தின் மீது நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. அது நழுவி விடாதவாறு தடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, சாய் தளத்தின் கோணத்தைச் சிறிது சிறிதாக உயர்த்தினால் உருளை எப்போது கவிழ்ந்து விழும்?

(7) ஒரே மாதிரியான, விட்டத்தைப போல் $\frac{1}{20}$ பங்கு தடிப் புள்ள பல வட்ட நாணயங்கள் ஒன்றின் மீது ஒன்றாக அடுக்கப் பட்டுள்ளன. அடிப் பக்கத்தைப்போல் ஆறிலொரு பங்கு உயரம் கொண்ட ஒரு சாய் தளத்தின் மீது அவை நழுவி விடாமல் அடுக்கப்பட்டிருந்தால், அவ்வாறு எத்தனை நாணயங்களை வைகக் முடியும்?

(8) அடிப் பக்கத்தின் ஆரத்தைப் போல் நான்கு மடங்கு உயரம் கொண்ட ஒரு கூம்பு அதன் அடிப் பக்கத்தின் விளிம்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் வழியே தொங்க விடப்பட்டுள்ளது. கூம்பு சம நிலையில் உள்ளபோது, அதன் அடித் தளமும், அச்சுக் கோடும், செங்குத்துக் கோட்டுக்குச் சம அளவில் சாய்ந்துள்ளன எனக் காட்டுக.

(9) ABCD என்ற செவ்வகத்தின் மூலை விட்டங்கள் G என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. GABCDG என்ற வடிவில் வளைக்கப்பட்ட ஒரு சீரான கம்பியின் புவியீர்ப்பு மையம் G-ஆனால் $AB = \sqrt{3}\ BC$ எனக் காட்டுக.

(10) ஒரு கூம்பு அதன் அடிப்பக்கத்துக்கிணையான தளத் தால் வெட்டப்பட்டுள்ளது. வெட்டப்பட்ட பகுதியில் மேற்புற வட்ட ஆரம் 1 மீட்டர் எனவும் அடிப்புற ஆரம் $1\frac{1}{2}$ மீட்டர் எனவும்

அதன் இரு தளங்களின் இடைத் தூரம் 2 மீட்டர் எனவும் இருந்தால், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

(11) ஒரு சீரான தண்டு, அதன் நீளத்துக்குச் சமமான ஆரமுள்ள ஓர் வட்ட வில்லாக வளைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

(12) *a* என்ற பக்கமுள்ள சதுரப் பரப்பு இரு அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் வழியே இரண்டாக வெட்டப்படுகிறது. பெரிய துண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

101. உராய்வு (Friction)

ஒரு பொருள் மற்றொன்றின் மீது நழுவிச் செல்லும் போதோ, அல்லது உரசிச் செல்லும் போதோ அத்தகைய இயக்கத்தை எதிர்க்கும் வகையில் ஒரு விசை செயல்படுவதை நடை முறையில் காண்கிறோம். இவ்விசை உராய்வு விசை (force of friction) எனபபடும். அமைதி நிலையிலுள்ள பொருளை நகரச் செய்யும் விசையைச் சிறு மதிப்பிலிருந்து சிறிது சிறிதாக அதிகரித்தோமானால், உராய்வு விசையும் சிறிது சிறிதாக உயரும். இயக்கத்தைத் தரும் விசை ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை விட அதிகமாகும் போது உராய்வு விசை உயராமல் நின்று விடுதலால் இயக்கம் தொடங்கும். இயங்கும் போதும் உராய்வு விசை செயல்பட்டுக் கொண்டே யிருப்பினும், அதன் மதிப்பு, பொருட்கள் நிலையாயிருக்கும் போது (இயக்கம் தொடங்கு முன்னர்) பெறும் உராய்வு விசையின் உச்ச மதிப்பை விடக் குறைவானதாக இருக்கும். இந்த உச்ச மதிப்பினை வரம்பு உராய்வு விசை (force of limiting friction) எனவும், உராய்வினை வரம்பு உராய்வு (limiting friction) எனவும் கூறுகிறோம்.

பல்வேறு சோதனைதளின் போது (கிடைத்த முடிவுகளைக் கொண்டு பின்வரும் உராய்வு விதிகளைக் கூறலாம்.

(1) உராய்வு விசையின் திசை, பொருளின் இயக்கத்தைத் தடுக்கும் வகையில், எதிர்த் திசையுல் இருக்கும்.

(2) ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு வரை, உராய்வு விசையின் மதிப்பு, இயக்கத்தைத் தோற்று விக்க முயலும் விசையின் மதிப்புக்குச் சமமானதாக இருக்கும். பொருள் மற்றொன்றின் மீது சற்றே நகரத் தொடங்கும் நிலையில் (அதற்குச் சற்று முன்னர்) உராய்வு விசை உச்ச மதிப்புடையதாக இருக்கும். இது வரம்பு உராய்வு விசை (force of limiting fricting) எனப்படும்.

(3) கொடுக்கப்பட்ட இரு தளங்களுக்கிடையே உச்ச உராய்வு விசையின் மதிப்பும், இயல்புக்கோட்டு எதிர்வினை (normal reaction)

யும், ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையான விகிதத்திலுள்ளன. இவ் விகிதத்தை உராய்வு எண் (Coefficient of friction) என்கிறோம். உராய்வு எண் தொடர்பு கொண்டுள்ள இரு தளங்களின் தன்மையைப் பொறுத்தது

(4) இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை விசையின் மதிப்பு மாறுதிருக்கும் வரை, உராய்வு விசை, தொடர்பு கொள்ளும் தளங்களின் பரப்பைக் (area) பொறுத்தோ, வடிவத்தைப் (shape) பொறுத்தோ மாறுவதில்லை.

(5) இயக்கம் (ஒன்றின் மீது மற்றொன்றின்) நிகழும் போதும் உராய்வு விசை செயல்படுகிறது. அது பொருளின் வேகத்தைப் பொறுத்து மாறுவதில்லையானாலும், இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை விசைக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும். மேலும் இந்த உராய்வு விசை வரம்பு உராய்வு விசையை விடக் குறைவாகவே இருக்கும்.

இவற்றுள் முதல் நான்கு விதிகளும் பொருட்கள் அமை நிலையிலிருத்தலால் நிலையியல் உராய்வு விதிகள் (laws of static friction) எனப்படுகின்றன.

102. உராய்வு எண், உராய்வுக் கோணம் உராய்வுக் கூம்பு (Coefficient of friction, angle of friction, Cone of friction)

உராய்வு எண் (Coefficient of friction) என்பது வரம்பு உராய்வு விசைக்கும், இயல்புக் கோட்டு எதிர் வினைக்குமுள்ள விகிதமாகும். வரம்பு உராய்வு விசை F எனவும், இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை R எனவும் கொண்டால், உராய்வு எண்

$$\mu = \frac{F}{R} \qquad 1$$

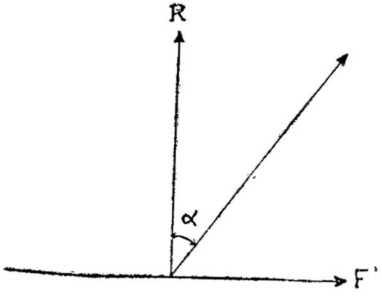
ஆகும். அல்லது வரம்பு உராய்வு விசை

$$F = \mu \text{ எனவும் எழுதலாம்.}$$

வரம்பு உராய்வு வீசையே உராய்வு விசையின் உச்ச மதிப்பாகையால், உராய்வு விசை (force of friction) யின் மதிப்பு சுழியிலிருந்து μR வரை மாறுபடலாம். F = μR வ்ன்பது வரம்பு உராய்வு விசையை மட்டுமே குறிக்கும்:

உராய்வுக் கோணம் (angle of friction) : உராய்வு விசை F ஐயும் இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை R -ஐயும் சேர்த்துக் கிடைக்கும் தொகு பயன் விசையைத் தொகு பயன் எதிர்வினை (Resultant Reaction) என்கிறோம். இதன் திசை இயல்புக் கோட்டுடன் a கோணத்தை உண்டாக்கினால் படத்திலிருந்து

$$\tan a = \frac{F'}{R} \qquad \text{...........}(102.2)$$



படம் 105

ஆகும். F' என்ற உராய்வு விசையின் மதிப்பைப் பொறுத்து α மாறும். F', வரம்பு உராய்வு விசை F -க்குச் சமமாக உள்ளபோது α -உச்ச மதிப்புடையதாக இருக்கும். α -வின் உச்ச மதிப்பை λ எனக் கொண்டால்

$$\tan \lambda = \frac{F}{R} \qquad (102.3)$$

சமன்பாடுகள் (101.1), (102.3) ஆகியவற்றை ஒப்பிட்டால்

$$\mu = \tan \lambda \qquad (102.4)$$

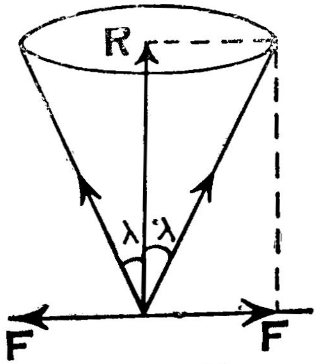
எனக் கிடைக்கும்.

λ -என்ற கோணத்தை உராய்வுக் கோணம் (angle of friction) என்கிறோம்.

எனவே, வரம்பு உராய்வு விசை செயல்படும் போது இயல்புக் கோட்டு எதிர் வினைக்கும், தொகு பயன் எதிர் வினைக்கும் இடையிலுள்ள கோணம் உராய்வுக் கோணம் எனப்படும்.

உராய்வுக் கூம்பு (Cone of frietion) :

உராய்வு விசையின் மதிப்பு சுழியிலிருந்து μR வரை இருக்கலாமாதலால், தொகு பயன் எதிர் வினைக்கும், இயல்புக் கோட்டு எதிர்



. 106

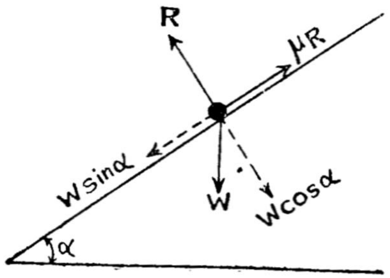
வினைக்கும் இடையிலுள்ள கோணம், சுழியிலிருந்து λ வரை இருக்கலாம்.

இயல்புக் கோட்டுக்கு நேர்குத்தான தளத்தில் எல்லாத் திசைகளிலும் இயக்கம் நிகழ்வதாயிருப்பின், இத்தகைய இயக்கங்களுக்கான தொகு பயன் எதிர் வினைகள், வரம்பு நிலையில், λ -என்ற அரை உச்சிக் கோணமுள்ள (semi-vertical angle) ஒரு கூம்பின் வளை பரப்பின் மீது இருக்கின்றன. இந்தக் கூம்பு உராய்வுக் கூம்பு (Cone of friction) எனப்படும்.

தொகு பயன் எதிர் வினையின் திசை எப்போதும் இந்த கூம்பினுள்ளே தான் இருக்க இயலும். கூம்பின் வளை பரப்பின் மீது தொகு பயன் எதிர்வினை உள்ளபோது, உராய்வு விசை, வரம்பு உராய்வு வியையாக இருக்கும்.

103. சாய்தளத்தில் பொருளின் சமநிலை (equilibrium of a body on an inclined plane)

உராய்வுள்ள ஒரு சாய் தளத்தின் மீதுள்ள பொருளின் சமநிலையைக் காண்போம். தளத்தின் சாய் கோணத்தைச் (angle of inclination) சிறிது மதிப்பிலிருந்து படிப்படியாக உயர்த்திக்



படம் 107

கொண்டேவந்தால், ஒரு குறிப்பிட்ட சாய் கோணம் வரும் போது பொருள் கீழே சறுக்கி வரும் நிலையில் இருக்கும். இப்போது தளத்திற்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும் உராய்வு விசை, வரம்பு உராய்வு விசையாக இருக்கும்.

இந் நிலையில் பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகள் மூன்று. (i) பொருளின் எடை w செங்குத்தாகக் கீழே நோக்கிச் செயல்படும். (ii) இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை R, தளத்துக்கு நேர்குத்தான கோட்டில் மேல் நோக்கிச் செயல்படும் (iii) வரம்பு உராய்வு விசை

தளத்திற்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். பொருள் கீழே சரியும் நிலையில் இருப்பதால்.) μ என்பது உராய்வு எண்ணானல் வரம்பு உராய்வு விசை μR ஆகும்.

இப்போது விசைகளைத் தளத்திற்கிணையான கூறுகளாகவும், தளத்துக்கு நேர்குத்தான கூறுகளாகவும் பிரித்தோமானால், பொருள் சம நிலையிலிருப்பதால்

$$\mu R = w \sin \alpha \qquad (103.1)$$

$$R = w \cos \alpha \qquad (103.2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து

$\tan\ \alpha = \mu$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆனால், $\mu = \tan \lambda$ (λ உராய்வுக் கோணம்) ஆதலால்,

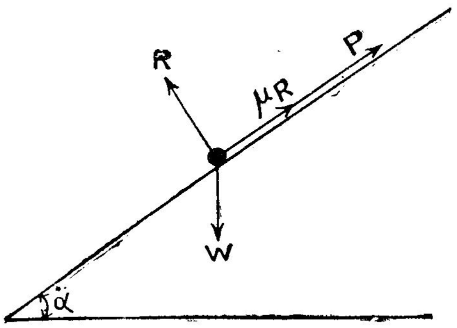
$$\alpha = \lambda \qquad (103.3)$$

அதாவது பொருள் சற்றே சரிந்து வரத் தொடங்கும் நிலையில் தளத்தின் சாய்வுக் கோணம் (angle of inclination), உராய்வுக் கோணத்துக்குச் சமமாக இருக்கும்.

சாய்வுக் கோணம், உராய்வுக் கோணத்தை விடக் குறைவாக உள்ளபோது உராய்வு விசை பொருளைச் சரிய விடாது தடுத்து நிற்கும். சாய்வுக் கோணம் λ-வை விட அதிகமானல் பொருள் தானே சரிந்து வரும்.

104. சாய் தளத்தில் பொருளின் சமநிலை - தளத்திற்கிணையான விசை (Equilibrium of a body on an inclined plane—Force parallel to the plane)

உராய்வுக் கோணம் λ உடையதும், λ-வை விட அதிகமான சாய்வுக் கோணமுள்ளதுமான ஒரு சாய் தளத்தின் மீதுள்ள பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கத் தேவையான, சாய்தளத்திற்கிணையான விசையின் மதிப்பைக் காண்போம்.



படம் 108

சாய்தளத்திற்கிணையாக P என்ற விசை செயல்பட்டுப் பொருளைக் கீழே நழுவ விடாமல் சற்றே தடுக்கும் எனக் கொள்வோம். இப்போது P-யின் மதிப்புச் சற்றே குறைந்தாலும் பொருள் கீழே சரியத் தொடங்குமாதலால், இந்நிலையில் அதன் மீது வரம்பு உராய்வு விசை தளத்திற்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல் படுகிறது. இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை (normal reaction) R ஆனால், வரம்பு உராய்வு விசை μR ஆகும். மேலும் உராய்வு எண் $\mu = \tan \lambda$ ஆகும்.

இப்போது பொருளின் மீது விசைகள் நான்கு. (i) பொருளின் எடை w நேரே செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும். (ii) இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை R, தளத்துக்கு நேர்க்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். (iii) வரம்பு உராய்வு விசை μR தளத்திற்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். (iv) வெளிப்புற விசை P தளத்துக்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல் படுகிறது.

பொருள் சமநிலையிலிருத்தலால், விசைகளைத் தளத்திற்கிணையான கூறுகளாகவும் தளத்துக்கு நேர்குத்தான கூறுகளாகவும் பிரித்தால்

$$P + \mu R = w \sin \alpha \tag{104.1}$$

$$R = w \cos \alpha \tag{104.2}$$

(இதில் α என்பது சாய்வுக் கோணம்)

$$\therefore \quad P = w \sin \alpha - \mu R$$

$$= w (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$= w \left(\sin \alpha - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cos \alpha \right)$$

$$= w \frac{\sin (\alpha - \lambda)}{\cos \lambda}$$

பொருள் சற்றே கீழ் நோக்கிச் சரிகின்ற நிலையில் தளத்திற்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செலுத்தப்பட வேண்டிய குறைந்த அளவு விசை

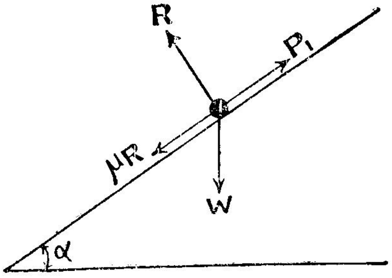
$$P = w \frac{\sin (\alpha - \lambda)}{\cos \lambda} \tag{104.3}$$

ஆகும்.

இப்போது P என்ற விசையை சிறிது சிறிதாக அதிகரித்துக் கொண்டே சென்றால், ஒரு குறிப்பிட்ட விசை P_1-க்குச் சற்றே அதிகமானால் கூடப் பொருள் மேலே நகரத் தொடங்கும். எனவே, P_1 என்பது சாய் தளத்தில் பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கக்

கூடிய, தளத்துக்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும் உயர்ந்த அளவு விசையாகும். இதன் மதிப்பைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

பொருள் P_1 என்ற விசை செயல்படும் போது சற்றே மேல் நோக்கி நகரத் தொடங்கும் நிலையிலிருத்தலால் வரம்பு உராய்வு விசை μR -கீழ் நோக்கித் தளத்துக்கிணையாகச் செயல்படும்.



படம் 109

இப்போதும் பொருளின் மீது நான்கு விசைகள் செயல்படுகின்றன. (i) பொருளின் எடை w (ii) இயல்புக் கோட்டு எதிர் வினை R (iii) வரம்பு உராய்வு விசை μR (iv) வெளிபுற விசை P_1. இவ்விசைகளின் திசைகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

முன் போலவே

$$R = w \cos \alpha \qquad (104.4)$$

$$P_1 - \mu R = w \sin \alpha \qquad (104.5)$$

$$\therefore \quad P_1 = \mu R + w \sin \alpha$$

$$= w(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$= w\left(\frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cos \alpha + \sin \alpha\right)$$

$$= \frac{w \sin (\alpha + \lambda}{\cos \lambda}$$

எனவே, பொருளைச் சாய் தளத்தின் மீது சம நிலையில் வைத்திருக்கக் கூடிய சாய் தளத்துக்கிணையான விசையின் பெரும மதிப்பு

$$P_1 = \frac{w \sin (\alpha + \lambda)}{\cos \lambda} \qquad (104.6)$$

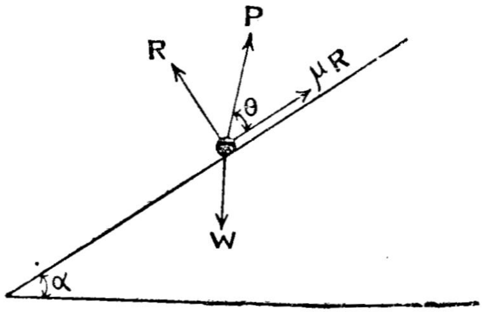
எனவே, தளத்திற்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும் விசை P -க்கும் P_1 க்கும் இடையில் இருந்தால் பொருள் சமநிலையில்

இருக்கும். P - சை விடக் குறைந்தால் கீழ் நோக்கியும், P_1 -ஐ விட அதிகமானல் மேல் நோக்கியும் தளத்தில் பொருள் நகரும்.

105. சாய் தளத்திற்கு θ கோணத்தில் செயல்படும் விசை (Force acting at an angle θ to the inclined plane)

சாய்வுக் கோணம், உராய்வுக் கோணத்தை விட அதிகமாக உள்ள சாய் தளத்தின் மீதுள்ள பொருளின், தளத்துக்கு θ கோணத்தில் ஒரு விசை செயல்பட்டு, அதனைச் சமநிலையிலிருக்கச் செய்கிறதென்போம். அதன் மதிப்பினைப் பின் வருமாறு காணலாம்.

பொருளின் மீது செயல்படும் வெளிப்புற விசை P என்போம். பொருள் கீழ் நோக்கிச் சற்றே நகரக் கூடிய நிலையிலிருந்தால் அதன் மீது செயல்படும் விசைகள் வருமாறு: (i) P -என்ற வெளிப்புற விசை தளத்துக்கு θ கோணத்தில் செயல்படுகிறது. (ii) பொருளின் எடை w செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகிறது.



படம் 110

(iii) வரம்பு உராய்வு விசை μR தளத்திற்கிணையாக மேல் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. (iv) இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை R தளத்துக்கு நேர்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

இவற்றைத் தளத்துக்கிணையான கூறுகளாகவும், தளத்துக்கு நேர்குத்தான கூறுகளாகவும் பிரித்தால், பொருள் சமநிலையிலிருத்தலால்,

$$w \sin \alpha = P \cos \theta + \mu R \qquad (105.1)$$

$$w \cos \alpha = P \sin \theta + R \qquad (105.2)$$

எனவே, $$\mu w \cos \alpha = \mu P \sin \theta + \mu R \qquad (105.3)$$

சமன்பாடு (105.3) -ஐ சமன்பாடு (105.1) -லிருந்து கழித்தால்,

$$w(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = P(\cos \theta - \mu \sin \theta)$$

உராய்வுக் கோணம் λ ஆனால், $\mu = \tan \lambda$ ஆதலால்,

$$w\left(\sin \alpha - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \cos \alpha\right) = P\left(\cos \theta - \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \sin \theta\right)$$

$$\therefore \qquad w \sin (\alpha - \lambda) = P \cos (\theta - \lambda)$$

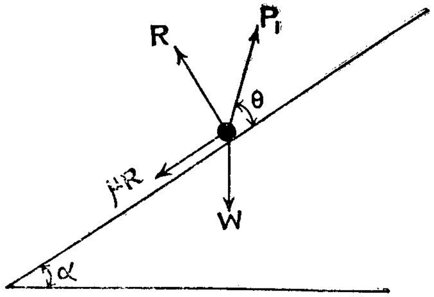
$$\therefore \qquad P = \frac{w \sin (\alpha - \lambda}{\cos (\theta + \lambda)}$$

எனவே, θ கோணத்தில் சாய் தளத்தின் மீதுள்ள பொருளின் மீது செயல்பட்டு, அதனைக் கீழே வராமல் தடுக்கக் கூடிய குறைந்த அளவு விசை

$$P = \frac{w \sin (\alpha - \lambda)}{\cos (\theta + \lambda)} \qquad (105.4)$$

ஆகும்.

இப்போது θ -கோணத்தில் (சாய் தளத்துக்கு) செயல்பட்டுப் பொருளைச் சற்றே மேல் நோக்கித் தளத்தில் நகரச் செய்யும் விசை P_1 என்போம். இப்போது முன் போலவே பொருள் மீது செயல்



படம் 111

படும் விசைகள் வருமாறு: (i) P_1 -என்ற வெளிப்புற விசை (ii) பொருளின் எடை w (iii) வரம்பு உராய்வு விசை μR (iv) இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை R.

இவைகளின் திசைகள் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. முன் போலவே, விசைக் கூறுகளைப் பிரித்தால், பொருள் சம நிலையில் இருப்பதால்,

$$P_1 \cos \theta = W \sin \alpha + \mu R \qquad (105.5)$$

$$P_1 \sin \theta + R = W \cos \alpha \qquad (105.6)$$

$$\therefore \quad \mu P_1 \sin \theta + \mu R = \mu W \cos \alpha \qquad (105.7)$$

சமன்பாடு (105.5) -லிருந்து

$$P_1 \cos \theta - \mu R = W \sin \alpha \qquad (105.8)$$

இதனைச் சமன்பாடு (105.7) -உடன் கூட்ட

$$P_1 (\cos\theta + \mu \sin\theta) = W(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\therefore \quad P_1\left(\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin\theta\right) = W\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$

எனவே, $$P_1 \cos(\theta - \lambda) = W \sin(\alpha + \lambda)$$

அல்லது $$P_1 = \frac{W \sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)}$$

எனவே, θ கோணத்தில் செயல்பட்டுப் பொருளைச் சற்றே மேல் நோக்கி நகரும் நிலையில் வைத்திருக்கக் கூடிய விசை

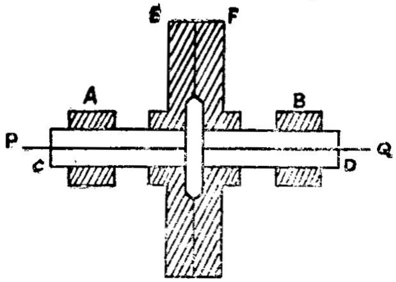
$$P_1 = \frac{W \sin(\alpha + \lambda)}{\cos(\theta - \lambda)} \qquad (105.9)$$

தளத்துக்கு θ கோணத்தில் செயல்படும் விசையின் மதிப்பு P -க்கும், P_1 -க்கும் இடையில் இருந்தால், பொருள் சாய்தளத்தின் மீது சம நிலையில் இருக்கும்.

106. உராய்வுக் கிளட்சு (Friction clutch)

ஒரே அச்சுக் கோட்டைக் கொண்ட இரு எந்திரத் தண்டுகளில் (shafts), ஒன்றின் சுழற்சி இயக்கம், மற்றொன்றிற்குக் கடத்தப் பயன்படும் ஒரு எந்திர அமைப்பையே கிளட்சு (clutch) என்கிறோம். இத்தகைய அமைப்பொன்றின் ஒரு வகையே உராய்வுக் கிளட்சு (friction clutch) எனப்படும். இதில் ஒரு எந்திரத் தண்டு வேகமாகச் சுழன்றுக் கொண்டிருக்கும். நிலையாக உள்ள அல்லது மெதுவாகச் சுழன்றுக் கொண்டிருக்கும் மற்றொரு தண்டு இதனுடன் மெதுவாகத் தொடர்புக் கொள்கிறது. இத் தொடர்பால் மெதுவாகச் சுழலும் தண்டின் சுழற்சி வேகம் அதிகரிக்கிறது. தொடர்பு முழுமையாக ஏற்படுத்தப் படும்போது இரு எந்திரத் தண்டுகளும் ஒரே வேகத்துடன் சுழலத் தொடங்குகின்றன. இரு தண்டுகளும் ஒன்றின் மீது ஒன்று அழுத்திப் பிடிக்கப்பட்ட நிலையில் இரண்டிற் கிடையே யுள்ள உராய்வு விசையே இத்தகைய இயக்கத்தைத் தோற்றுவித்தலால், இதனை உராய்வுக் கிளட்சு என்கிறோம். பின் வரும் அமைப்பைக் கொண்டு இத்தகைய கிளட்சு இயங்கும் விதத்தைப் புரிந்து கொள்ளலாம்.

PQ என்ற பொது அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்துச் சுழலக் கூடிய C, D என்ற இரு எந்திரத் தண்டுகள் உள்ளன. A, B என்பன இத் தண்டுகளைத் தாங்கும் அமைப்புக்கள். ஒன்றை யொன்று நோக்கியவாறு E, E என்ற இரு வட்டத் தட்டுகள் முறையே C, D என்ற தண்டுகளின் முனைகளில் இணைக்கப்



படம் 112

பட்டுள்ளன. இப்போது C -யும் அதனுடனிணைந்த E என்ற வட்டத் தட்டும் வேகமாகச் சுழல்வதாகக் கொள்வோம். F என்ற வட்டத் தட்டு E -யின் மீது அழுந்தப் பொருந்தியிருந்தால், E -க்கும், F -க்கும் இடையே யுள்ள உராய்வு விசையின் காரணமாக E -யின் சுழற்சி வேகம் தடைபடும். F நன்ருக அழுந்தியுள்ள போது இவ் வுராய்வு விசையும் அதிகமாக இருத்தலால், F -ம் E -யுடன் சேர்ந்து இயங்கத் தொடங்கும். சிறிது நேரத்தில் E, F இரண்டும் ஒரே சுழற்சி வேகத்துடன் இயங்கத் தொடங்குகின்றன. இந் நிலையில் கிளட்சு முழுமையாகத் தொடர்புக் கொண்டிருப்பதாகக் (fuliy engaged) கூறுகிருேம்.

உந்து வண்டிகளில் சக்கரத்தை இயக்கும் தண்டு, எஞ்சினின் சுழலும் தண்டுடன் இவ்வித அமைப்பால் இணைக்கப்பட்டிருக்கும். ஒரு வலுவான வில் (spring) E -யையும், F -ஐயும் ஒன்ருேடொன்று அழுந்தித் தொட்டுக் கொண்டிருக்கச் செய்யும். இயக்கத்தை நிறுத்த, இவ்வில்லை எதிர்த் திசையில் இழுத்தால், F, E -யிலிருந்து விலகுவதால், D -யின் சுழற்சி நின்றுவிடும்.

107. நல்ல தராசுக்குத் தேவையான பண்புகள் (Requisites of a good balance)

சாதாரணத் தராசு (common balance) முதல் வகை நெம்பு கோல் தத்துவத்தி லமைந்த தாதலால், அதன் எந்திரப் பயன் (mechanical advantage) ஒன்று ஆகும். இப் பகுதியில் நல்ல தராசொன்றிற்குத் தேவையான பண்புகளைப் பற்றிக் காண்போம்.

நல்ல தராசுக்குத் தேவையான பண்புகள் மூன்று. (1) உண்மை (2) நிலைப்பாடு (3) உணர்வு நுட்பம். இப்பண்புகளைப் பெற்றிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளைத் தனித்தனியே காண்போம்.

1. உண்மை (Truth):

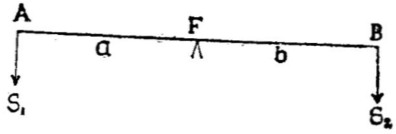
தராசுத் தட்டுகளில் எடைகள் இல்லாத போது, அல்லது சம எடைகள் உள்ளபோது, தராசின் தூலம் (beam) கிடைமட்டத்திற்கிணையாக இருந்தால், அத்தகைய தராசு உண்மையுடையதென்கிறோம். இந் நிலையில் துலாக் கோலின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே அக் கோலுக்கு வரையப்படும் நேர்க்குத்துக் கோட்டில் தராசின் ஆதாரப் புள்ளி (fulcrun) இருக்கும். S_1, S_2 என்பன தராசுத் தட்டின் எடைகளெனவும், முறையே a, b என்பன தராசின் புயங்களின் (arms) நீளம் எனவும் கொள்வோம்.

தராசுத் தட்டுகளில் எடை யேது மில்லாதபோது தூலம் கிடைமட்டத்திற்கிணையாக இருத்தலால், ஆதாரப் புள்ளி F -ஐப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$S_1 a = S_2 b \qquad (107.1)$$

தூலத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் F -க்குச் செங்குத்தாக நேர் கீழே இருத்தலால், F -ஐப் பொறுத்துத் தூதத்தின் எடையின் திருப்புத் திறன் சுழியாகும்.

இப்போது இரு தட்டுக்களிலும் சமமான W, W என்ற எடைகள் வைக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். உண்மையுடைய தராசின்



படம் 113

தூலம் இந் நிலையிலும், கிடைமட்டத்திற் கிணையாகவே இருக்குமாதலால், முன்போலவே F -ஐப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$(S_1 + W)\, a = (S_2 + W)\, b \qquad (107.2)$$

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து சமன்பாடு (107.1) -ஐக் கழித்தால்,

$$W a = W b$$

அல்லது
$$a = b \qquad (107.3)$$

எனக் கிடைக்கும். சமன்பாடுகள் (107.3), (107.2) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$S_1 = S_2 \qquad (107.4)$$

எனவும் பெறுகிறோம்.

எனவே, ஒரு தராசு உண்மையுடையதாக இருக்க வேண்டுமானல்,

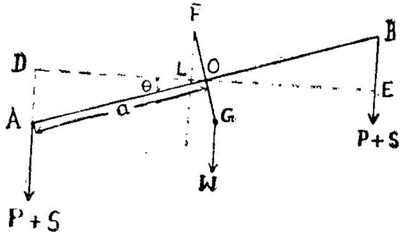
(i) அதன் தூலக் கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் ஆதாரப் புள்ளியின் வழியே தூலத்துக்கு வரையப்படும் நேர்க்குத்துக் கோட்டில் இருக்க வேண்டும்

(ii) தராசின் புயங்களின் நீளங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

(iii) தராசுத் தட்டுகளின் எடைகள் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

2. நிலைப்பாடு (Stability):

AB என்பது உண்மையுடைய ஒரு தராசின் தூலம் எனவும், F - ஆதாரப் புள்ளி எனவும், G - தூலத்தின் புவியீர்ப்பு மையமெனவும் கொள்வோம். மேலும், தராசின் புயங்கள் சமமான a, a என்ற நீளங்களுடையவை யெனவும், தராசுத் தட்டுகள் சமமான



படம் 114

S, S என்ற எடைகள் கொண்டவை யெனவும் கொள்வோம். தூலத்தின் எடை W எனவும், P, P என்ற சம எடைகள் தராசுத் தட்டுகளில் வைக்கப்படுகின்றன எனவும் கொள்வோம்.

தூலம் இடப்பெயர்ச்சி யுறும்போது விரைவாகச் சமநிலைக்குத் திரும்பினல், தராசு நிலைப்பாடுடையது என்கிறேம்.

மேற்கூறிய நிலையில் தராசின் தூலம் θ கோணம் இடப்பெயர்ச்சி யுறுகிற தென்போம் (F -ஐப் பொறுத்து). இவ்வாறு இடப்பெயர்ச்சியுற்ற நிலையில், சம நிலைக்குத் திரும்பச் செய்கின்ற, F -ஐப் பொறுத்த மீட்புத் திருப்புத் திறன் (restoring moment),

$(P+S)\,LE + W \cdot FG \sin\theta - (P+S)\,DL$ ஆகும். $FG = h$ எனவும், $FO = b$ எனவும் கொண்டால் மீட்புத் திருப்புந் திறன் (F -ஐப் பொறுத்து)

$$\{(P+S)(a\cos\theta + b\sin\theta) + Wh\sin\theta - (P+S)(a\cos\theta - b\sin\theta)\}$$

$$= \{2(P+S)b + Wh\}\sin\theta \qquad (107.5)$$

எனக் கிடைக்கும்.

இந்தத் திருப்புத் திறனின் மதிப்பு அதிகமாக இருந்தால்தான், தராசின் தூலம் விரைந்து சம நிலைக்கு மீண்டு வரும். எனவே, தராசு நிலைப்பாடு மிக்கதாக இருக்க வேண்டுமானால், S, W, b, h ஆகியவை பெரும் மதிப்புக்கள் கொண்டவையாக இருக்க வேண்டும். FO = b = O ஆக உள்ள ஒரு தராசு நிலைப்பாடு மிக்கதாயிருக்க வேண்டுமானால், சமன்பாடு (107.5) -ன்படி தூலத்தின் எடை W -வும், FG = h = தூலத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து ஆதாரப் புள்ளியின் தொலைவும் அதிகமாக இருக்க வேண்டும்.

3. உணர்வு நுட்பம் (Sensitiveness):

இரு தட்டுக்களிலும் வைக்கப்பட்டுள்ள எடைகளின் மதிப்பு, மிகச் சிறு அளவே வேறுபட்டாலும், தூலம் மிகப் பெரும் விலக்கமுற்றால் (deflection), தராசு உணர்வு நுட்பம் மிக்க தென்கிறோம்.

படத்தில் இடது தட்டில் வைக்கப்பட்ட எடை, வலது தட்டில் உள்ளதை விட w என்ற அளவு அதிகமெனக் கொள்வோம். தராசின் தூலம் θ அளவு விலக்கமுற்றுச் சமநிலையில் உள்ள தென்போம்.

F -ஐப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$(P + S + w)(a\cos\theta - b\sin\theta)$$
$$= (P + S)(a\cos\theta + b\sin\theta) + W h\sin\theta$$

எனக் கிடைக்கும். எனவே,

$$w(a\cos\theta - b\sin\theta)$$
$$= 2(P + S)\, b\sin\theta + W h\sin\theta$$

அல்லது $$w\, a = \tan\theta\ \{ b(2P + 2S + w)\} + W h\tan\theta$$

எனவே, $$\tan\theta = \frac{w\, a}{W h + (2P + 2S + w)\, b} \qquad (107.6)$$

கொடுக்கப்பட்ட w வின் மதிப்புக்கு θ, அல்லது $\tan\theta$ அதிகமாக இருந்தால் உணர்வு நுட்பம் அதிக மென்கிறோம். எனவே, சமன்பாடு (107.6) -லிருந்து அதிகமான உணர்வு நுட்பம் பெற a அதிகமானதாகவும், h, b, w முதலியன சிறியவையாகவும் இருத்தல் வேண்டும். இந்த உணர்வு நுட்பம் P, S, முதலியவற்றையும் பொறுத்துள்ளதைக் காண்கிறோம். வேதியியல் தராசுகளில் இக் குறையை நீக்குவதற்காக b -யின் மதிப்பு சுழியாக்கப்பட்டிருக்கும்.

b = O ஆகும் போது சமன்பாடு (107.6)

$$\tan\theta = \frac{w\, a}{W h} \qquad (107.7)$$

என மாறும்.

எனவே, தராசின் உணர்வு நுட்பம் அதிகமாக இருக்க வேண்டுமாயின், புயங்களின் நீளம் a அதிகமாகவும். தூலத்தின் எடை W குறைவாகவும், ஆதாரப் புள்ளிலிருந்து தூலத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் தொலைவு h குறைவாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

மேற் கூறியவற்றிலிருந்து தராசு நிலைப்பாடு மிக்கதாயிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளும், உணர்வு நுட்பம் மிக்கதாயிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளும் ஒன்றுக் கொன்று முரணுயிருப்பதையறியலாம். எனவே, எந்தத் தராசும் உணர்வு நுட்பம் மிகுந்ததாயும், அதே சமயம் நிலைப்பாடு மிக்கதாயும் இருக்க இயலாது. வேதியியல் ஆய்வுகளில் உணர்வு நுட்பம் மிக்க தராசுகளைப் பயன் படுத்துவோம். வணிகத் துறையில் பயன்படுத்தப்படும் தராசுகள் நிலைப்பாடு மிக்கவையாக இருத்தல் நலம். அப்போது தான் பொருட்களை விரைவில் எடையிட இயலும்.

108. பொய்த் தராசின் துணை கொண்டு சரியான எடையைக்காணும் முறை—போர்டா முறை (Finding the true weight using a false balance – Borda's method)

தராசின் புயங்கள் சம நீளமுள்ளவைகளாக இருந்து, தராசுத் தட்டுகளின் எடைகள் சற்றே மாறுபட்டிருந்தால், தட்டுகளில் எடையேது மில்லாதபோது தூலம் கிடைமட்டத்திற் கிணையாக நிற்காது. இக்குறையை எடை குறைவாக உள்ள தட்டில் போதுமான அளவு சிறு எடைகளையோ, அல்லது சிறு கற்களையோ சேர்த்துத் தூலம் கிடைமட்டத்திற் கிணையாக வரும்படி செய்வதன் மூலம் போக்கலாம்.

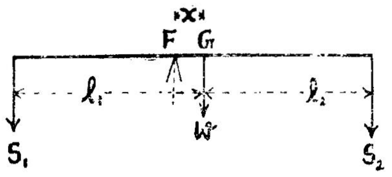
புயங்களின் நீளங்கள் சமமாக இல்லாமலும், தட்டுக்களின் எடைகள் சமமாக இல்லாமலும் உள்ள ஓர் தராசைக் கொண்டு 'போர்டா முறை'ப்படி பொருளின் சரியான எடையைக் காண இயலும்.

பார்டா முறை (Borda's method):

எடை காண வேண்டிய பொருளை இடது தட்டிலும், தராசுத் தூலம் கிடைமட்டத்திற்கிணையாக இருத்தற்குத் தகுந்த எடைகளை வலது தட்டிலும் வைத்து ஈடு செய்கிறோம். பின்னர், இடது தட்டிலிருந்து பொருளை நீக்கி விட்டு, அதில் எடைக் கற்களை (standard weights) வைத்து, மீண்டும் தராசின் தூலம் கிடை நிலைக்கிணையாக இருக்குமாறு செய்ய வேண்டும். இப்போது இடது தட்டில் எடைக் கற்கள் காட்டும் எடையே பொருளின் சரியான எடையாகும்.

109. பொய்த் தராசைக் கொண்டு பொருளின் சரியான எடை காணல் — காஸ் முறை (Finding the tone weight of a body using a false balance — Gauss method)

l_1, l_2 என்பன தராசின் புயங்களின் நீளங்களெனவும், முறையே S_1, S_2 என்பன தராசுத் தட்டுகளின் எடைகளெனவும், F என்பது ஆதாரப் புள்ளி யெனவும் கொள்வோம். தூலத்தின் எடையின் வினைக்கோடு AB-யை வெட்டும் புள்ளி G ஆனல், $FG = x$ எனவும், தூலத்தின் எடை w எனவும் கொள்வோம்.

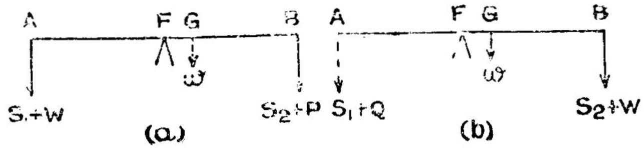


படம் 115

தராசுத் தட்டுகளில் எடையேது மில்லாதபோது தூலம் கிடைத் தளத்துக்கிணையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது ஆதாரப் புள்ளி F-ஐப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$S_1 l_1 = S_2 l_2 + w x \qquad (109.1)$$

உண்மையான எடை W ஆக உள்ள ஒரு பொருள் இடது தட்டில் வைக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். இப்போது தூலத்தைக் கிடைநிலையில் வைத்திருக்க, வலது தட்டில் வைக்கப்பட வேண்டிய எடை P எனக் கொள்வோம்.



படம் 116

இப்போது ஆதாரப் புள்ளி F-ஐப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$(S_1 + W)\, l_1 = (S_2 + P)\, l_2 + w x \qquad (109.2)$$

இப்போது பொருளை வலது தட்டில் மாற்றி வைத்து எடைகளை மாற்றி வைத்து எடைகளை இடது தட்டில் வைப்போம். இந் நிலையில் தராசுத் தூலத்தைக் கிடைநிலையில் வைத்திருக்க, இடது

நட்டில் வைக்கப்படும் எடை Q ஆனல், ஆதாரப் புள்ளி F -ஐப் பொறுத்தத் திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$(S_1 + Q)\, l_1 = (S_2 + W)\, l_2 + w\, x \qquad (109.3)$$

சமன்பாடுகள் (*109.1*), (*109.2*) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$W\, l_1 = P\, l_2 \qquad (109.4)$$

எனப் பெறுகிறோம். அதேபோல சமன்பாடுகள் (*109.1*), (*109.3*) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$Q\, l_1 = W\, l_2 \qquad (109.5)$$

எனவும் பெறுகிறோம்.

சமன்பாடுகள் (*109.4*), (*109.5*) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{W}{Q} = \frac{P}{W}$$

அல்லது $W^2 = PQ$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, பொருளின் உண்மையான எடை

$$W = \sqrt{PQ} \qquad (109.6)$$

எனவே, பொருளை இரு தட்டுக்களிலும் தனித் தனியே வைத்துக் கண்டுபிடித்த போலி எடைகளின் பெருக்கத் தொடர் இடை (Geometric Mean) பொருளின் உண்மையான எடையைக் கொடுக்கும். இது இரட்டை எடையிடும் முறை (double weighing method) எனவும் அழைக்கப்படும்.

இம் முறையில் தராசின் புயங்களின் நீளங்களின் விகிதத்தையும் கணக்கிடலாம். சமன்பாடுகள் (*109.4*), (*109-5*) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$(W \,.\, l_1)\,(Q \,.\, l_1) = (W \,.\, l_2)\,(P \,.\, l_2)$$

எனவே,
$$\frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{P}{Q}$$

அல்லது
$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{P}{Q}} \qquad (109.7)$$

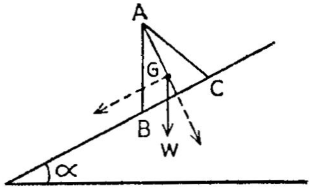
P, Q ஆகியவற்றைக் காண்கிறோமாதலால், $\frac{l_1}{l_2}$ -வின் மதிப்பை அறியலாம்.

110. பயிற்சிகள் (Excercises)

விளக்கக் கணக்கு (1)

r ஆரமும், h உயரமும் கொண்ட ஒரு கூம்பு ஒரு சாய்தளத்தின் மீது நிற்கிறது. தளத்தின் சாய் கோணத்தைப் படிப்படியாக உயர்த்தினுல், உராய்வு எண் $\frac{4r}{h}$-ஐ விடக் குறைவாக உள்ள போது, கூம்பு கவிழ்வதற்கு முன்னுல் நழுவிக் கீழே வருமெனக் காட்டுக.

W என்பது கூம்பின் எடையாகவும், G அதன் புவியீர்ப்பு மையமாகவும் இருக்கட்டும். சாய் கோணம் α என்போம்.



படம் 117

எடை W -வை W sin α என்ற தளத்திற் கிணையான விசையாகவும், W cos α என்ற தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான விசையாகவும் பிரிக்கலாம்.

எனவே, தளத்துக்கு நேர்க்குத்தான எதிர்வினை விசை W cos α -க்குச் சமம்.

எனவே, உராய்வு விசை $= \mu$ W cos α.

$$W \sin \alpha > \mu W \cos \alpha$$

என இருந்தால், கூம்பு தளத்தின் மீது நழுவிக் கீழே வரும்.

அதாவது, $\tan \alpha > \mu$.

B-யைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிடுவோம். G ஆனது, $\frac{h}{4}$ உயரத்தில் உள்ள தாகையால்,

$\left(W \sin \alpha \cdot \frac{h}{4}\right)$ என்ற திருப்புத் திறன் (W cos α . r) என்ற திருப்புத் திறனை விட அதிகமாக இருந்தால், கூம்பு கவிழ்ந்துவிடும்

எனவே, கூம்பு கவிழ,

$$W \sin \alpha \frac{h}{4} > W \cos \alpha \cdot r$$

$$\tan \alpha > \frac{4r}{h}$$

எனவே, $\mu < \frac{4r}{h}$ ஆக உள்ளபோது tan α ஆனது $\frac{4r}{h}$ ன்ற மதிப்பை அடைவதற்கு முன் μ -வின் மதிப்பை அடையுமாதலால் கூம்பு முதலில் நழுவிச் செல்லும்.

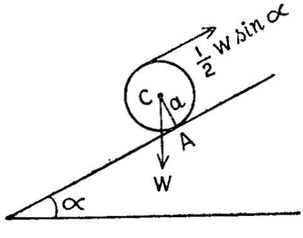
$\mu > \frac{4r}{h}$ - ஆக இருந்தால், tan α ஆனது $\frac{4r}{h}$ என்ற மதிப்பை முதலில் அடைவதால் கூம்பு கவிழும் (topples),

$\mu = \frac{4r}{h}$ ஆனுல், நழுவியும், கவிழ்ந்தும் கூம்பு கீழே வரலாம்.

விளக்கக் கணக்கு (2):

ஒரு சீரான கோளம் ஒரு சாய்தளத்தின் மீது, அதன் மீது தொடு கோட்டின் வழியே $\frac{1}{2}$ W sin α என்ற விசை செயல்பட்டுச் சம நிலையில் உள்ளது. W என்பது கோளத்தின் எடையாகவும், α சாய் கோணமாகவும் இருந்தால், அவ் விசை தளத்திற்கிணையான தெனவும், உராய்வு எண் $\frac{1}{2}$ tan α -வை விட அதிகமான தெனவும் காட்டுக.

A என்பது கோளம் தளத்தைத் தொடும் புள்ளியையும், C அதன் மையத்தையும், a ஆரத்தையும் குறிக்கட்டும்.



படம் 118

இப்போது A -யைப் பொறுத்துக் கோளம் உருளாமல் இருக்க வேண்டுமானுல், A -யைப் பொறுத்து $\frac{1}{2}$ W sin α என்ற விசையின் திருப்புத் திறனும், எடையின் திருப்புத் திறனும் எதிரெதிர்த் திசையிலும் சம மதிப்புடனும் இருக்க வேண்டும்.

A -யைப் பொறுத்து W -வின் திருப்புத் திறன் = W sin α . a,

எனவே, $\frac{1}{2}$ W sin α, A -யிலிருந்து $2a$ என்ற நேர்க்குத்துத் தொலைவில் (perpendicular distance) செயல்பட வேண்டும். எனவே, $\frac{1}{2}$ w sin α தளத்திற் கிணையாகச் செயல்பட வேண்டும்.

இப்போது உருளை நழுவாமல் இருக்க வேண்டுமானால், தளத்திற் கிணையான கூறுகளைக் காணும்போது,

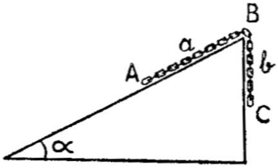
$$\mu \text{ w} \cos \alpha + \tfrac{1}{2} \text{ w} \sin \alpha \not< \text{ w} \sin \alpha$$

$$\therefore \qquad \mu \not< \tfrac{1}{2} \tan \alpha$$

விளக்கக் கணக்கு (3):

உராய்வுக் கோணம் α -வை சாய் கோணமாக உள்ள ஒரு சாய் தளத்தின் மீது ஒரு பளுவான சங்கிலி, a -என்ற நீளமுள்ள பகுதி அதன் பெருமச் சரிவுக் கோட்டில் உள்ளவாறும், மீதமுள்ள b நீளமுள்ள பகுதி தளத்தின் மேல் முனையிலிருந்து செங்குத்தாகத் தொங்கிக் கொண்டும் உள்ளது. சங்கிலி நழுவும் நிலையில் உள்ள போது, $b = 0$ அல்லது $b = 2a \sin \alpha$ எனக் காட்டு.

ABC என்பது சங்கிலியையும், w என்பது அதன் ஓரலகு நீளத்தின எடையையும் குறிக்கட்டும்.



படம் 119

AB -யின் எடை $a\,w$ ஆதலால், அதன் மீது செயல்படும் உராய்வு விசை $\mu\, a\, w \cos \alpha$. ஆனால், $\mu = \tan \alpha$ ஆதலால் AB -யின் மீது செயல்படும் உராய்வு விசை $= a\, w \sin \alpha$.

A என்பது கீழ் நோக்கி நழுவும் நிலையிலிருந்தால்,

$$w\, a \sin \alpha - w\, a \sin \alpha = bw$$

எனவே, $\qquad b = 0.$

A என்ற புள்ளி மேல் நோக்கி நகரும் நிலையிலிருந்தால்,

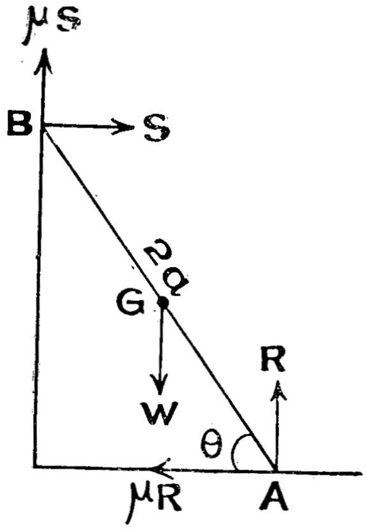
$$w\, a \sin \alpha + w\, a \sin \alpha = b\, w$$

அல்லது $\qquad b = 2a \sin \alpha.$

விளக்கக் கணக்கு (4):

ஒரு சீரான ஏணியின் ஒரு முனை தரையிலும், மற்றொரு முனை ஒரு செங்குத்தான சுவரின் மீதும் உள்ளது. தரையின் உராய்வு எண் μ ஆகவும், சுவரின் உராய்வு எண் μ_1 ஆகவும், இரு முனையிலும் ஏணி நழுவி விழக் கூடிய நிலையிலும் இருந்தால், கிடைமட்டத்தைப் பொறுத்து ஏணியின் சாய்கோணம் என்ன?

AB என்பது ஏணியையும் G அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் குறிக்கட்டும். R, S என்பன முறையே A, B என்ற முனைகளில் இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினைகளென்போம். A என்ற முனை தரை



படம் 120

யின் மீது நழுவும் நிலையிலுள்ளதால் உராய்வு விசை μR சுவரை நோக்கியுள்ளது. B என்ற முனை சுவரின் மீது நழுவும் நிலையில் (கீழ் நோக்கி) உள்ளதால் $\mu_1 S$ சுவரில் மேல் நோக்கிச் செயல்படும்.

$2a$ என்பது ஏணியின் நீளத்தையும் θ என்பது ஏணியின் சாய் கோணத்தையும் குறிக்கட்டும்.

கிடைத்தளத்துக் கிணையாகவும், செங்குத்தாகவும் விசைகளின் கூறுகளைப் பிரித்தால்,

$$\mu R = S \tag{110.1}$$

$$R + \mu_1 S = W \tag{110.2}$$

எனக் கிடைக்கும்.

A -யைப் பொறுத்த திருப்புத்திறனைக் கணக்கிட்டால்,

$$W \cdot a \cos\theta = \mu_1 S \cdot 2a\cos\theta + S \cdot 2a\sin\theta$$ அல்லது

$$W\cos\theta = 2S(\mu_1\cos\theta + \sin\theta) \tag{110.3}$$

சமன்பாடுகள் (110.1), (110.2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\mu(W - \mu_1 S) = S$$

எனவே, $$\mu W = S(1 + \mu\mu_1) \tag{110.4}$$

சமன்பாடுகள் (110.3), (110.4) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{\cos\theta}{\mu} = \frac{2(\mu_1 \cos\theta + \sin\theta)}{(1 + \mu\mu_1)}$$

$$\therefore \quad \cos\theta(1 + \mu\mu_1) = 2\mu\mu_1\cos\theta + 2\mu\sin\theta$$

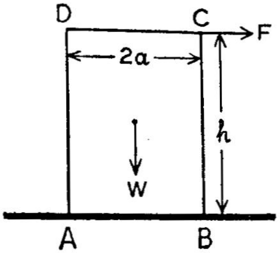
$$\therefore \quad \cos\theta(1 - \mu\mu_1) = 2\mu\sin\theta$$

எனவே, $$\tan\theta = \frac{1 - \mu\mu_1}{2\mu} \tag{110.5}$$

சமன்பாடு (110.5) -லிருந்து θ -வின் மதிப்மை யறியலாம்.

விளக்கக் கணக்கு (5): ABCD என்ற ஒரு செவ்வகம் செங்குத்துத் தளத்தில் அதன் அடிப்பக்கம் AB ஒரு பலகையின் மீதுள்ளவாறு நிற்கிறது. DC -யின் திசையில் படிப்படியாக உயரும் ஒரு விசை செயல்படுகிறது. செவ்வகத்தின் சமநிலை முதலில் நழுவுதலால் மாறுமா அல்லது கவிழ்தலால் (toppling) மாறுமா?

W என்பது செவ்வகத்தின் எடையையும், F என்பது விசையை யும் குறிக்கட்டும்.



படம் 121

AB = $2a$ எனவும், BC = h எனவும் கொள்வோம்.

செவ்வகம் கவிழ்ந்தால் அது B -யைப் பொறுத்துச் சுழன்று விழ வேண்டும். கவிழக் கூடிய நிலையில் B -யைப் பொறுத்து F -ன் திருப்புத்திறனும், எதிர்த் திசையிலும் இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $$F \cdot h = W \cdot a \tag{110.6}$$

செவ்வகம் முதலில் நழுவினால், நழுவக் கூடிய நிலையில்

$$F = \mu W \tag{110.7}$$

ஆக வேண்டும்.

எனவே, F -ன் சமன்பாடு (110.7) -ன் படி உள்ளத்தை விட சமன்பாடு (110.6) -ன் படி உள்ளது குறைவாக இருந்தால் செவ்வகம் முதலில் கவிழும்; அதிகமாக இருந்தால் முதலில் நழுவும்.

எனவே, $\frac{a}{h} < \mu$ என இருந்தால் செவ்வகம் கவிழும்

$\frac{a}{h} > \mu$ என இருந்தால் செவ்வகம் நழுவும்.

விளக்கக் கணக்கு (6): ஒரு தராசின் தட்டுக்களின் எடைகள் சமமானவையாக இல்லாமலும், புயங்களின் நீளங்கள் வெவ்வேருகவும் உள்ளன. ஒரு வணிகர் 2W அளவுள்ள பொருளை எடையிடுவதற்கு, முதலில் ஒரு தட்டில் w என்ற எடைக்குத் தகுந்த பொருளையும், பின்பு மற்றெரு தட்டில் w என்ற எடைக்குத் தகுந்த பொருளையும் எடையிட்டுத் தருகிருர். தராசுக் கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் நீண்ட புயத்திலிருந்தால் அவர் தன்னைத் தானே ஏமாற்றிக் கொள்கிருர் எனக் காட்டு.

a, b என்பவை புயங்களின் நீளங்களெனவும், புவியீர்ப்பு மையம் b நீளமுள்ள புயத்தில் திருப்பு முனை (fulcrum) யிலிருந்து x என்ற தொலைவில் உள்ள தெனவும் கொள்வோம். W என்ற எடை இரு தட்டுக்களிலும் அடுத்தடுத்து வைக்கப்படும் போது, முறையே W_1, W_2 என்ற எடையுள்ள பொருட்களால் சமனப் படுத்தப்படுகிற தென்போம். புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செயல்படும் எடை W என்போம் அவ்வாருனல்,

$$W . a = W_1 b + W^1 x.$$

$$W_2 . a = W . b + W^1 . x$$

எனவே, $$W_1 + W_2 = \frac{Wa - W^1 x}{b} + \frac{Wb + W^1 x}{a}$$

$$\therefore W_1 + W_2 - 2W = \frac{Wa - W^1 x}{b} + \frac{Wb + W^1 x}{a} - 2W$$

$$= \frac{W(b-a)^2}{ab} + \frac{W^1 (b-a)}{ab}$$

b என்பது a -யை விட அதிகமானதால்,

$(W_1 + W_2 - 2W)$ நேர்க்குறியுடையதாகும். எனவே, $W_1 + W_2 > 2W$

எனவே, வணிகர் அளந்து கொடுக்கும் எடை 2W -வை விட அதிகமானதாகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள் : (1) w என்ற எடையை ϕ என்ற உராய்வுக் கோணமுள்ள ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது சற்றே நகர்த்தத் தேவையான விசை W sin ϕ எனக் காட்டு.

(2) இரு சாய் தளங்கள் ஒரே மேல் முனையை உடையனவாக உள்ளன. அம் முனையில் உள்ள ஒரு உராய்வற்ற கப்பியின் வழியே செல்லும் ஒரு கயிறு, அதன் முனைகளில் உள்ள இரு சம எடைகளைத் தாங்குகின்றன. ஒரு தளம் உராய்வுடனும், மற்றொன்று உராய்வற்றதாகவும் இருந்தால், உராய்வற்ற தளத்தின் மீதுள்ள எடை கீழ் நோக்கி நகரும் நிலையில் இருந்தால், இரு தளங்களின் சாய் கோணங்களின் தொடர்பினைக் காண்க.

(3) உராய்வுள்ள ஒரு கோளமொன்றின் மீது ஒரு துகள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வு எண் μ -ஆனால் அத்துகளிலிருந்து கோள மையத்திற்கு வரையப்படும் ஆரம், செங்குத்துக் கோட்டு $\tan^{-1}\mu$ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கும் போது துகள் நகரத் தொடங்கும் நிலையிலிருக்குமெனக் காட்டுக.

(4) உராய்வு எண் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ உள்ள உள்ளீடற்ற கோளமொன்றின் ஆரம் a. அதனுட் பரப்பில் எவ்வளவு உயரத்தில் ஒரு துகள் விழாமல் நிற்க இயலும்?

(5) ஒரு சீரான ஏணி ஒரு முனை கிடைத்தளத்திலும், மற்றொரு முனை செங்குத்தான சுவரின் மீதும் உள்ளவாறு எல்லைச் சம நிலையில் உள்ளது. கிடைத்தளத்தின் உராய்வு எண் μ எனவும், சுவர் உராய்வற்றதாகவும் இருந்தால் ஏணி, செங்குத்துக் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(2\mu)$ எனக் காட்டு.

(7) ஒரு சீரான ஏணி ஒரு முனை கிடைத்தளத்திலும் மற்றொரு முனை செங்குத்தான சுவரின் மீதும் உள்ளவாறு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. கிடைத் தளம் உராய்வுள்ளதாகவும், சுவர் உராய்வற்றதாகவும் இருந்தால், ஏணி எல்லைச் சம நிலையில் உள்ளபோது அதன் மீது ஒருவன் ஏறுவதாகக் கொள்வோமானால் அவன் பாதி உயரத்துக்கு மேல் செல்ல இல்லாதெனக் காட்டு.

(7) W என்ற சம எடைகள் கொண்ட இரு ஏணிகள், ஒரு உராய்வுள்ள தரையின் மீது ஒன்றின் மீது மற்றொன்று சாய்ந்திருக்குமாறு நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளன. இரு ஏணிகளின் இடைக் கோணம் $2a$ எனவும், உராய்வு எண் μ எனவும் கொண்டால், ஏணிகள் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் மேல் முனையில் வைக்கக் கூடிய மிகப் பெரிய எடை என்ன?

(8) ஒரு சீரான உருளை அதன் சம தளம் ஒரு சாய் தளத்தின் மீதுள்ளவாறு நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளது. தளத்தின் சாய் கோணத்தைப் படிப்படியாக உயர்த்தும் போது உருளையின் ஆரத்திற்கும், உயரத்திற்குமிடையே யுள்ள விகிதம் உராய்வு எண்ணை விடக் குறைவாக இருந்தால், உருளை சரிவதற்கு முன் கவிழ்ந்து விடுமெனக் காட்டு.

(9) ஒரு எடையை α -சாய் கோணமுள்ள ஒரு சாய் தளத்தில் மேல் நோக்கி நகர்த்தத் தேதையான மிகச் சிறிய விசை, அப் பொருள் கீழே நழுவாமல் தடுக்கத் தேவையான மிகக் குறைந்த விசையைப் போல் இரு மடங்கானுல், உராய்வு எண் $\frac{1}{3}\tan\alpha$ எனக் காட்டு.

(10) அரைக் கோளக் கூடொன்று ஒரு சாய் தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. உராய்வுக் கோணம் α ஆனுல் கிடைத் தளத்துக்கும், அரைக் கோள ஓட்டின் விளிம்பின் வழியே செல்லும் தளத்துக்கும் இடையேயுள்ள கோணம் $\sin^{-1}(2\sin\alpha)$ -வை விட அதிகமாக இருக்க இயலாது எனக் காட்டு.

(11) வெவ்வேறு மூலப் பொருட்களாலான W என்ற சம எடைகள் கொண்டே இரு பொருட்கள் சாய்தள மொன்றின் பெருமச் சரிவுக் கோட்டிற்கிணையான கயிறென்றல் இணைக்கப்பட்டுச் சாய் தளத்தின் மீது எல்லைச் சம நிலையில் உள்ளன. சாய் தளத்திற்கும் கீழே உள்ள பொருளுக்கு மிடையே உராய்வு எண் $\frac{1}{3}$ ஆகவும், மேலே உள்ள பொருளுக்கும் தளத்திற்குமிடையே உராய்வு எண் $\frac{2}{3}$ ஆகவும் இருந்தால், தளத்தின் சாய் கோணத்தையும், கயிற்றின் இழு விசையையும் கணக்கிடுக.

(12) 25 மீட்டர் நீளமும், 50 கிலோகிராம் எடையும் கொண்ட ஒரு ஏணியின் புவியீர்ப்பு மையம் அதன் கீழ் முனையிலிருந்து 5 மீட்டர் தொலைவில் உள்ளது. அது உராய்வற்ற ஒரு சுவரின் மீது சாய்ந்துள்ளது. அதன் கீழ் முனை சுவரிலிருந்து 7 மீட்டர் தொலைவில் இருந்தால், அம் முனைக்கும் கிடைத் தளத்துக்குமிடையேயுள்ள உராய்வு விசையைக் கணக்கிடுக. கீழ் முனையிலிருந்து 12 மீட்டர் தொலைவில் ஏணியின் மீது 10 கிலோ கிராம் எடையைத் தொங்க விடும்போது ஏணி எல்லைச் சம நிலையிலிருந்தால் உராய்வுக் எண்ணைக் கணக்கிடுக.

(13) 10 மீட்டர் நீளமுள்ள ஏணியொன்று ஒரு முனை தரையிலும் மற்றொரு முனை உராய்வற்ற செங்குத்தான சுவரின் மீதும் உள்ளவாறு சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. தரையின் உராய்வெண் $\frac{1}{2}$ எனவும், சுவரிலிருந்து ஏணியின் அடி முனை 2 மீட்டர் தொலைவில் உள்ள தெனவும் கொண்டு ஏணியின் எடையைப்போல் நான்கு மடங்கு எடையுள்ள ஒருவன் அதன் மீது, நழுவாவண்ணம் மேல் முனை வரை செல்ல இயலுமெனக் காட்டுக.

(14) சாய் தள மொன்றின் மீது ஒரு சீரான சதுரக் கட்டையொன்று வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடை மட்டத்திற்கிணையாக உள்ள அதன் மேல் விளிம்பின் மையப் புள்ளியில் கயிறென்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இக்கயிறு பெருமச் சரிவுக் கோட்டிற்கிணையாக உள்ளவாறு அதன் மீது செயல்படும் விசை, கன சதுரக்

கட்டையைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கிறது. உராய்வு எண் μ ஆனுல், சாய் தளத்தின் கோணம் $\tan^{-1}(2\mu+1)$ -ஐ விடக் குறைவாக இருக்க இயலாது எனக் காட்டுக.

(15) $2a$ என்ற பக்கமுள்ள கன சதுரக் கட்டையொன்று ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீதுள்ளது. உராய்வு எண் μ என்போம். கட்டையின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில், கிடைத் தளத்துக்கிணையான ஒரு விசை, கட்டையின் செங்குத்தான பக்கத்துக்கு நேர்க்குத்தான திசையில் செயல்படுகிறது. இவ் விசை செயல்படும் புள்ளி கிடைத் தளத்திற்கு மேல் $\frac{a}{\mu}$ என்ற உயரத்தை விட அதிகமான உயரத்தில் இருந்தால், $\mu > \frac{1}{2}$ எனில், கட்டை கவிழ்வதற்கு முன் நழுவிச் செல்லுமெனவும், $\mu < \frac{1}{2}$ என்ருல், நழுவிச் செல்லு முன் கவிழுமெனவும் காட்டுக.

(16) ஒரு சாய் தளத்தின் மீது நிறுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ள கூம்பொன்று நழுவும் நிலையிலும், அதே சமயம் கவிழும் நிலையிலும் உள்ளது. உராய்வு எண் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆனுல், கூம்பின் கோணம் என்ன?

(17) AB என்ற சீரான ஏணியொன்று A என்ற புள்ளியில் ஒரு உராய்வற்ற சுவரின் மீதும், B என்ற புள்ளியில் தரையின் மீதும் உள்ளது. ஏணியின் எடையைப் போல் மூன்று மடங்கு எடையுள்ள ஒருவன் அதன் மீது ஏறினுல், ஏணியின் கீழ் முனையில் உள்ளபோது இருந்ததைப் போல், மேல் முனையில் உள்ள போது உராய்வு விசை 4 மடங்கு இருக்கும் எனக் காட்டுக.

பிரிவு IV

பாய்பொருள் நிலையியல்
(Hydrostatics)

111. முன்னுரை — பாய்பொருள் (Introduction - fluid)

பொருட்களைப் பொதுவாக, திடப்பொருட்கள், திரவப் பொருட் பொருட்கள், வாயுப் பொருட்களென வகைப்படுத்துவ துண்டு. ஒரு பொருள் இவ் வகைகளுள் எதனைச் சார்ந்த தென்பது நாம் அதனைக் கண்ணுறும்போது அது இருக்கக் கூடிய பௌதிக நிலையைப் பொறுத்ததே யாகும். மாறுபட்ட பௌதிக நிலைகளில் ஒரே பொருள் திடப் பொருளாகவோ, திரவப் பொருளாகவோ அல்லது வாயுப் பொருளாகவோ இருக்கலாம். பொதுவாகக் குறைந்த வெப்ப நிலைகளில் திடப் பொருளாக உள்ள இரும்பு முதலியவைகள் கூட தகுந்த உயர் வெப்ப நிலைகளில் திரவ வடிவிலும், வாயு வடிவிலும் இருக்கலாம். அதேபோல, அறை வெப்ப நிலையில் வாயுக்களாக உள்ள காற்று, ஹைட்ரஜன் முதலியவைகளை தகுந்த கீழ் வெப்ப நிலைகளில் திரவ நிலைக்கும், திடப் பொருள் நிலைக்கும் கொணர இயலும்.

பொதுவாகக் கூறினல், திடப்பொருள் குறித்த வடிவமும் பருமனும் (definite shape and size) கொண்டிருக்கும். திரவப் பொருள் குறித்த பருமனைக் கொண்டிருந்தாலும், அதன் வடிவம் கொள் கலத்தின் வடிவமேயாகும். ஆனல், தனியான மேற்பரப்பு (free surface) உண்டு. வாயுப் பொருளுக்குக் குறித்த வடிவமோ, பருமனே கிடையாது. கிடைத்த இடம் முழுவதையும் அடைத்து, நிரவி நிற்கும் தன்மை படைத்தவை வாயுக்கள். ஓரிடத்திலிருந்து மற்ருேரிடத்திற்குப் பாய்ந்து செல்கின்ற தன்மை படைத்தவைகளாதலால், திரவப் பொருட்களையும், வாயுப் பொருட்களையும் ய்பொருட்கள் (fluids) என்கிருேம்.

112. அழுத்தம், அழுத்தமையம் (Pressure and centre of pressure)

ஒரு கலத்துள் இருக்கும் திரவம் அக் கலத்தின் சுவர்களின் மீதும், அடிப்புறத்தின் மீதும், அது தொட்டுக் கொண்டிருக்கும்

ஒவ்வொரு சிறு பரப்பின் மீதும் விசையைச் செலுத்தும். திரவம் அமைதி நிலையில் உள்ளபோது இவ் விசை, பரப்பின் ஒவ்வொரு சிறு பகுதியிலும், அதற்கு நேர்க்குத்தாகச் செயல்படும். ஒரு சிறு பரப்பின் மீது செயல்படும் விசைக்கும், அப் பரப்பிற்கும் உள்ள விகிதம் 'அழுத்தம்' எனப்படும். ஒரு சிறு பரப்பு $\vec{A}$ -யின் மீது நேர்க்குத்தாகச் செயல்படும் விசை $\vec{F}$ ஆனால் அழுத்தம்

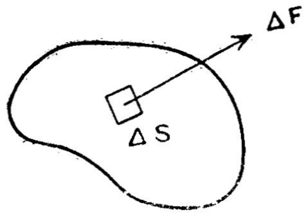
$$P = \frac{\vec{F}}{\vec{A}} \qquad (112.1)$$

அழுத்தம் ஓர் ஸ்கேலார் அளவு. இதன் அலகு நியூட்டன் சதுர மீட்டர்.

ஒரு பாய்பொருளைக் கொண்டுள்ள மூடிய பரப்பினைக் காண்போம். அப் பரப்பின் ஒரு சிறு பகுதியை $\triangle \vec{s}$ என்ற வெக்டாரால் குறிப்போம். இவ் வெக்டாரின் எண் மதிப்பு அச் சிறு பகுதியின் பரப்புக்குச் சமமாகவும், அதன் திசை வெளி நோக்கிய இயல்புக் கோட்டின் (outward normal) திசையிலும் இருக்கின்றன. இந்தச் சிறு பரப்பின் மீது பாய் பொருள் செலுத்தும் விசை வெளி நோக்கிய இயல்புக் கோட்டின் திசையில் இருக்கும். இதனை $\triangle \vec{F}$ என்ற வெக்டாரால் குறிப்போமாயின், p என்பது ஒரு ஸ்கேலரானால்,

$$\triangle \vec{F} = p \triangle \vec{s} \qquad (112.2)$$

என எழுதலாம். (இரு வெக்டார்களும் ஒரே திசையில் உள்ளன



படம் 122

வாதலால், ஒன்றினை மற்றொன்றின் பெருக்கற் பலனாகக் குறிக்க லாம்.) எனவே, அழுத்தம்

$$p = \underset{\vec{\triangle s} \to 0}{Lt} \frac{\vec{\triangle F}}{\vec{\triangle s}} \qquad (112.4)$$

அழுத்தம் புள்ளிக்குப் புள்ளி வேறுபடலாம். அவ்வாறிருந்தால், அப் புள்ளியைச் சுற்றி ஒரு மிகச் சிறு பரப்பின் மீது செயல்படுகின்ற விசைக்கும், அச் சிறு பரப்பிற்குமுள்ள விகிதத்தை, அப் பரப்பு சிறியதாகிப் புள்ளியாகும் நிலையில், அப் புள்ளியின் அழுத்தமாகக் கொள்ளலாம். இப்போது அழுத்தம்

$$p = \underset{\vec{\triangle s} \to 0}{\text{Lim}} \frac{\vec{\triangle F}}{\vec{\triangle s}} \qquad (112.4)$$

ஆகும்.

அழுத்த மையம் (Centre of pressure) :

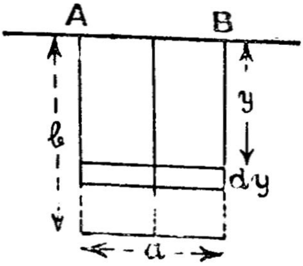
திரவத்தினுளுள்ள ஒரு சமதளப் பரப்பின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம், (அல்லது சரியாகக் கூற வேண்டுமானால், அப் புள்ளியைச் சுற்றிய சிறு பரப்பின் மீது செலுத்தப்படும் விசை) அச் சமதளப் பரப்பிற்கு நேர்க்குத்தான திசையிலும், திரவ மட்டத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் ஆழத்துக்கு நேர் விகிதத்திலும் இருக்கும். இப் பரப்பின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் இவ்வாறு செயல்படும் அழுத்த விசைகள், ஒரு இணை விசைகள் தொகுதியாகும். இவையனைத்தும் ஒரு போக்கு இணைவிசைகளாதலால், (like parallel forces) ஒரு தனிப்பட்ட தொகுபயன் விசையால் குறிக்க இயலும். இத் தொகுபயன் விசை அப் பரப்பின் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியாகச் செயல்படும். அப் புள்ளியை அழுத்த மையம் (Centre of pressure) என்கிறோம்.

எனவே, ஒரு பரப்பின் அழுத்த மைய மென்பது, அப் பரப்பின் மீது தொடர்பு கொண்டுள்ள திரவம் செலுத்துகின்ற தொகுபயன் விசை எந்தப் புள்ளியின் வழியாகச் செயல்படுகிறதோ அந்தப புள்ளியைக் குறிக்கும்.

113. செவ்வகப் பரப்பின் அழுத்த மையம் (Centre of pressure of a rectangular lamina):

ஒரு பக்கம் திரவ மட்டத்திலுள்ளவாறு திரவத்தினுள் இருக்கும் ஒரு செவ்வகப் பரப்பின் அழுத்த மையத்தைப் பின் வருமாறு கணக்கிடலாம்.

AB என்ற பக்கம் திரவ மட்டத்தில் உள்ளவாறு, திரவத்தினுள்ளிருக்கும் ABCD என்ற செவ்வகப் பரப்பிணைக் காண்போம். அதில் y -ஆழத்தில் dy அகலமுள்ள ஒரு சிறு துண்டுப் பரப்பை



படம் 123

ஆராய்வோம். திரவத்தின் அடர்த்தி ρ எனில், அச் சிறு பரப்பின் மீது அழுத்தம் $y\rho g$ ஆகும். எனவே, அமுக்கம் (Thurst) $= a\rho g\, y\, dy$ ஆகும். இதில் a - என்பது AB -யின் நீளமாகும். [dy சிறியதாகையால் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அழுத்தம் சமமாக இருக்கும்]

AB -யைப் பொறுத்து இந்த அமுக்கத்தின் திருப்புத் திறன்

$$= a\rho g\, y^2\, dy.$$

இச் சிறு பரப்பைப் போன்று ABCD -யை AB -க்கிணையாகப் பல சிறு பரப்புக்களாகப் பிரிக்கலா மாதலால், ABCD -யின் மீது செயல்படும் அமுக்கங்களின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \int_0^b a\rho g\, y^2\, dy$$

ஆனால், ABCD -யின் மீது செயல்படும் மொத்த அமுக்கம்

$$= \int_0^b a\rho g\, y\, dy.$$

இது வரையறைப்படி அழுத்த மையத்தின் வழியே செயல்படும். திரவ மட்டத்திலிருந்து ABCD -யின் அழுத்த மையம் H ஆழத்திலிருப்பதாகக் கொண்டால், AB -யைப் பொறுத்து ABCD -யின் மீது செயல்படும் அமுக்கத்தின் திருப்புத் திறன்

$$= H\int_0^b a\rho g\, y\, dy$$

எனவே,
$$H\int_0^b a\rho g\, y\, dy = \int_0^b a\rho g\, y^2\, dy$$

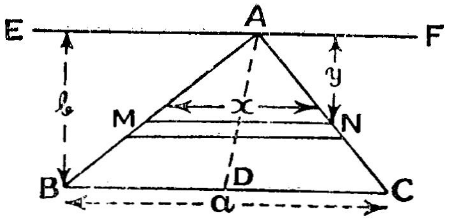
$$\therefore \qquad H\,.\,\frac{b^2}{2} = \frac{b^3}{3}$$

அல்லது
$$H = \frac{2}{3}\,b \qquad (113.1)$$

எனவே, செவ்வக பரப்பின் அழுத்த மையம் திரவ மட்டத்தி லிருந்து $\frac{2}{3}$ b ஆழத்திலுள்ளது. சமச்சீரமைவின் (svmm trv) காரண மாக, இது AB . CD ஆகியவற்றின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிலிருக்கும். இம் முறை ஒரு பக்கம் திரவ மட்டத்தில் உள்ள வாறு அமிழ்ந்துள்ள இணைகரத்துக்கும் பொருந்தும்.

114. முக்கோணப் பரப்பின் அழுத்த மையம் (Ccntre of pressure of a triangular lamina)

அடிப்புறம் கிடைத் தளத்துக் கிணையாகவும், முனை (vertex) திரவ மட்டத்திலும் உள்ளவாறு திரவ மட்டத்தினுள் உள்ள முக் கோணப் பரப்பின் அழுத்தமையத்தைப் பின்வருமாறு காண்போம். முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் நீளம் a என்போம். ρ-என்பது



படம் 124

திரவத்தின் அடர்த்தியையும் EF-என்பது திரவ மட்டத்தையும் குறிக்கட்டும். திரவ மட்டத்திலிருந்து அடிப்பக்கத்தின் ஆழம் b எனவும் கொள்வோம். முக்கோணப் பரப்பின் மீது BC-க்கு இணை யாக, y-ஆழத்தில் dy அகலமுள்ள சிறு பரப்பை எடுத்துக் கொள் வோம். அச் சிறு பரப்பின் நீளம் x என்போம். அதன் பரப்பு $= x\,dy$. எனவே, அச் சிறு பரப்பின் மீது செயல்படும் அமுக்கம் $= y\,\rho g\,.\,x\,dy$. திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து இந்த அமுக்கத்தின் திருப்புத் திறன் $= y^2\,\rho g\,x\,dy$.

முக்கோணங்கள் AMN, ABC ஆகியவை வடிவொத்தவை யாதலால்,

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

எனவே, $$x = \frac{ya}{b};$$

எனவே, திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து MN -ன் மீது செயல் படும் அமுக்கத்தின் திருப்புத் திறன்

$$= \frac{a \rho g y^3 dy}{b}.$$

இதேபோன்று MN -க்கு இணையான பல சிறு பரப்புக்களாக முக்கோணப் ABC -யைப் பிரித்தால், திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து முக்கோணத்தின் மீது செயல்படும் அமுக்கங்களின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \int_0^b \frac{a \rho g y^3 dy}{b}$$

ஆனல், ABC என்ற பரப்பின் மீது செயல்படும் மொத்த அமுக்கம்

$$= \int_0^b y \rho g x dy$$

$$= \int_0^b \frac{a \rho g y^2 dy}{b}$$

இந்த அமுக்கம் அழுத்த மையத்தின் வழியே செயல்பட வேண்டு மாதலால், திரவ மட்டத்திலிருந்து அழுத்த மையம் H ஆழத்தி லிருந்தால், திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து இதன் திருப்புத் திறன்

$$= H \int_0^b \frac{a \rho g y^2 dy}{a}$$

$$\text{எனவே,}\quad H\int_0^b \frac{a\,\rho g\,y^2\,dy}{b} = \int_0^b \frac{a\,\rho g\,y^3\,dy}{b}$$

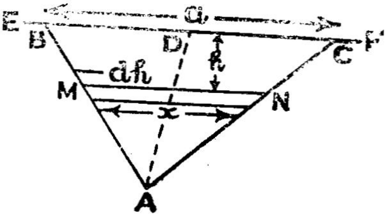
$$\therefore\quad H\,\frac{b^3}{3} = \frac{b^4}{4}$$

$$\text{அல்லது,}\quad H = \frac{3}{4}\,b \qquad (114.1)$$

எனவே, அழுத்த மையம் திரவ மட்டத்திலிருந்து $\frac{3}{4}\,b$ ஆழத்தி லுள்ளது. ஒவ்வொரு சிறு பரப்பின் அமுக்கமும் அதன் மையப் புள்ளி வழியே செயல்படு மாதலால், ABC -யின் அழுத்த மையம் A -யை BC -யின் மையப் புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோட்டில் இருக்க வேண்டும்.

115. முக்கோணப் பரப்பின் அழுத்த மையம் (ii) (Centre of Pressure of a trangular lamina)

இப் பகுதியில் ஒரு பக்கம் திரவ மட்டத்தில் உள்ளவாறு திரவத்துள் உள்ள ஒரு முக்கோணப் பரப்பின் அழுத்த மையத்தைக் கணக்கிடுவோம். BC என்ற பக்கம் திரவ மட்டத்தில் உள்ளவாறு திரவத்துள் உள்ள ABC என்ற முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொள்



படம் 125

வோம். BC = a எனவும், திரவத்தின் அடர்த்தி ρ எனவும் b என்பது திரவ மட்டத்திலிருந்து A -யின் ஆழம் எனவும் கொள்வோம். முக்கோணத்தை BC -க்கு இணையாக dh என்ற சிறு அகலமுள்ள சிறு சிறு பகுதிகளாகப் பிரிப்போம்.

h ஆழத்தில் x -நீளமுள்ள ஒரு சிறு பரப்பைக் காண்போம். அதன் பரப்பு = $x\,dh$ அதன் மீது செயல்படும் அமுக்கம் = $h\,\rho\,g\,x\,dh$

ஆனால், $\frac{x}{a} = \frac{b - h}{b}$ அதலால்,

$$x = \frac{a\,(b - h)}{b}$$

எனவே, சிறு பரப்பின் மீது செயல்படும அழுக்கம்

$$= \frac{h\,\rho g\, a\,(b - h)\,dh}{b}$$

திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து இதன் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{h^2\,\rho g\, a\,(b - h)\,dh}{b}$$

இதே போன்ற எல்லாச் சிறு பரப்புக்களின் திருப்புத்திறன் களின் கூட்டுத் தொகை (திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து)

$$= \int_0^b \frac{a\,\rho g\, h^2\,(b - h)\,dh}{b}$$

முக்கோணம் ABC -யின் மீது செயல்படும் மொத்த அமுக்கம்

$$= \int_0^b \frac{a\,\rho g\, h\,(b - h)\,dh}{b}$$

திரவ மட்டத்திலிருந்து அமுத்த மையத்தின் ஆழம் H ஆனால், திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து இதன் திருப்புத்திறன்

$$= \mathrm{H}\int_0^b \frac{a\,\rho g\, h\,(b - h)\,dh}{b}$$

எனவே, $$\mathrm{H}\int_0^b \frac{a\,\rho g\, h\,(b - h)\,dh}{b} = \int_0^b \frac{a\,\rho g\, h^2\,(b - h)\,dh}{b}$$

அதாவது, $$\mathrm{H}\left[\frac{1}{2}\,h^2 b - \frac{1}{3}h^3\right]_0^b = \left[\frac{1}{3}\,b\,h^3 - \frac{1}{4}\,h^4\right]_0^b$$

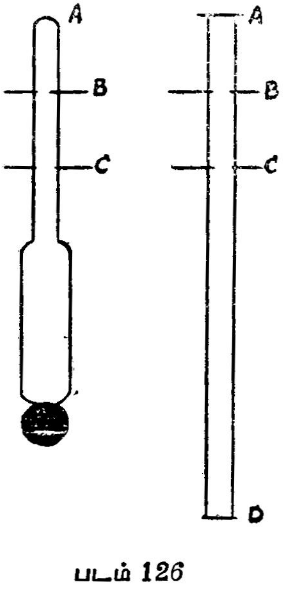
அல்லது, $$\mathrm{H} = \frac{1}{2}\,b \qquad (115.1)$$

ஒவ்வொரு சிறு பரப்பின் அமுக்கமும் அதன் மையப் புள்ளி வழியே செயல்படுமாதலால், அடிப்பக்கம் BC -யின் மையப் புள்ளி D ஆனல், முக்கோணத்தின் அழுத்தமையம் AD என்ற கோட்டில் $\frac{1}{2}b$ ஆழத்தில் (திரவ மட்டத்திலிருந்து) இருக்கும். இது AD யின் மையப் புள்ளியாக இருக்கும்.

மேலே நாம் அழுத்தமையம் கண்ட பரப்புக்களெல்லாம் செங்குத்தாகத் திரவத்தினுள் இருக்கும் பரப்புக்கள் குறிக்கின்றன. எனினும் பரப்புக்கள் செங்குத்தாக இல்லாவிட்டாலும், அழுத்த மையம் மேற்கூறிய புள்ளிகளில் தான் இருக்குமென எளிதில் காட்டலாம்.

116. பொதுத் திரவமானி (Common hydrometer)

திரவங்களின் ஒப்பு அடர்த்திகளை நேரடியாக அளக்கக் கூடிய கருவி பொதுத் திரவமானியாகும். இதில் அளவீடுகள் பொறிக்கப் பட்ட நீண்ட கண்ணுடித் தண்டொன்றும், அதனடியில் அதனேடு



படம் 126

இணைக்கப்பட்ட சற்று அகன்ற குழாயும், குழாயினடியில், செங்குத் தாக திரவத்தில் மிதப்பதற்கேதுவாக பாதரசம் அல்லது ஈயக் குண்டுகள் நிரம்பிய ஒரு கண்ணுடிக் குமிழும் உள்ளன.

இப்போது இத் திரவமானியில் அளவீடுகள் பொறிக்கப்படும் முறையைக் காண்போம். முதலில் திரவமானியை நீரில் மிதக்க விடுகிறோம். இப்போது வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் தண்டின் பகுதியின் நீளம் L என்போம். பின்னர் தெரிந்த ρ என்ற அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் திரவமானியை மிதக்க விடுகிறோம். இப்போது வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் தண்டின் பகுதியின் நீளம் l என்போம்.

V என்பது திரவமானியின் மொத்த பருமன் எனவும், தண்டின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு a எனவும் கொள்வோம். எனவே, நீருள் அமிழ்ந்த பருமன் $= (V - La)$. அதே போல் திரவத்தில் அதனுள் அமிழ்ந்த பருமன் $= (V - la)$. மிதவையின் எடையும் அதனால் விலக்கப்படுகின்ற திரவத்தின் எடையும் சமமாதல் வேண்டும். எனவே,

$$(V - La) \cdot 1 = (V - la)\,\rho$$

அல்லது, $$V\rho - V = \rho\, la - La$$

எனவே, $$V = \frac{a\,(\rho l - L)}{(\rho - 1)} \qquad (116.1)$$

ρ, l, L என்பன நாம் எடுத்துக்கொண்ட திரவத்துக்கும் நீருக்கும் மாறுவதில்லை யாதலால், சமன்பாடு (116.1) -ஐ

$$V = Ka \qquad (116.2)$$

என எழுதலாம்.

இப்போது ρ_1 என்ற அடர்த்துள் திரவமானியை மிதக்க விட்டு, வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் தண்டின் நீளத்தை l_1 என அளப்போம். இப்போது,

$(V - La) = (V - l_1 a)\,\rho_1$ ஆதலால், சமன்பாடு (116.3) லிருந்து

$$_1 = \frac{K - L}{K - l_1} \qquad (116.4)$$

ρ_1 -ன் வெவ்வேறு மதிப்புக்களுக்கு l_1 -ன் மதிப்புக்களையும், $_1$ -ன் மதிப்புக்களுக்கு, ρ_1 -ன் மதிப்புகளையும் இச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறலாம்.

இப்போது திரவமானி அதே a என்ற குறுக்கு வெட்டு பரப்பும், V பருமனும் கொண்ட நீண்டதொரு தண்டாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். அவ்வாறானல், $V = a \cdot AD$ ஆகும்.

BA என்பது திரவமானி நீரில் உள்ளபோது வெளியே தெரியும் பகுதியையும், CA என்பது ρ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் மிதக்கும்

போது வெளியே தெரியும் பகுதியையும் குறிக்கட்டும். அவ்வாறு ஞல்,

$$(a \,.\, AD - a \,.\, BA) = (a \,.\, AD - a \,.\, CA)\,\rho$$

எனவே, $a \,.\, BD = \rho \,.\, a \,.\, DC$

அல்லது, $$\rho = \frac{BD}{DC} \quad (116.5)$$

எனவே, $$DC = \frac{BD}{\rho} \quad (116.6)$$

எனவே, D யிலிருந்து C -யின் தொலைவு ஒப்பு அடர்த்திக்கு எதிர் விகிதத்திலுள்ளது. எனவே, அடர்த்தி அதிகமாக அதிகமாக DC குறையும். எனவே, தண்டின் மீது அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழே வரும் போது அதிகமாகிக் கொண்டு வரும். எனவே, ஒப் படர்த்திகளின் மதிப்புகள் கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் (arithmetic progression) அமைந்திருந்தால், அத்தகைய திரவங்களில் மிதக்கும் போது D யிலிருந்து C -யின் தொலைவு சீரிசைத் தொடரில் (harmonic progression) இருக்கும். இத்தகைய திரவமானி ட்வேடல் திரவமானி (Twaddel's hydrometer) எனப்படும்.

அவ்வாறின்றி, ஒப்படர்த்திகள் சீரிசைத் தொடரில் அமைந் தால், D -யிலிருந்து C -யின் தொலைவு கூட்டுத்தொடரில் இருக்கும். இத்தகைய குறியீடுகளைக் கொண்ட திரவமானி (Beaume's hydrometer) எனப்படும்.

117. மிதக்கும் பொருட்களின் நிலைப்பாடு—மிதவைக் காப்பு மையம் (Stability of floating bodies : metacentre)

மிதக்கும் பொருட்கள் சமநிலையிலிருக்க (i) மிதக்கும் பொருளின் எடை, அதனுல் விலக்கப்பட்ட திரவத்தின் எடைக்குச் சமமானதாகவும், (ii) மிதக்கும் பொருளின் புவியீர்ப்பு மையமும், அதனுல் விலகலுறக் கூடிய திரவப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையமும் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் இருக்க வேண்டு மெனவும் மிதத்தல் விதிகளிலிருந்து அறிவோம்.

திரவத்தில் தடையின்றி மிதக்கும் பொரிளின் மீது திரவத்தின் அழுக்கம் (thrust), அப்பொருளால் விலகலுறுகின்ற திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியாகச் செயல்படும். இப் புள்ளி மிதவைத் திறன் மையம் (Centre of buoyancy) எனப்படும்.

திரவத்தில் ஒரு பொருள் மிதக்கும் நிலையில், திரவ மட்டத்தின் வழியே பொருளின் வெட்டு பரப்பை மிதவைத் தளம் (plane of floatation) என்கிருேம்.

மிதக்கும் பொருள் அசையும் போது அதனால் விலகலுறக் கூடிய திரவத்தின் பருமன் மாறுபடாத வகையில் அசைந்தால், மிதவைத் திறன் மையம், மிதவைத் திறன் பரப்பு (surface of buoyancy) என்ற பரப்பின் மீது நகரும்.

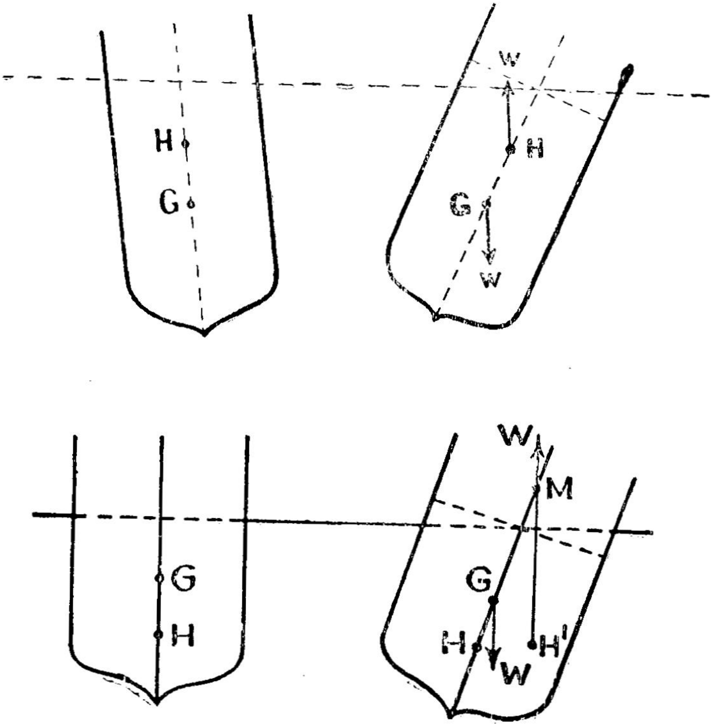
மிதக்கும் பொருள் சம நிலையிலிருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகளை முன்னர் கூறினோம். ஆனால், சம நிலை நிலைப்பாடுடையதாக (Stable) இருக்க வேண்டுமானால், மற்றொரு நிபந்தனையும் நிறைவு பெற்றிருக்க வேண்டும். இதனை அடுத்த பகுதியில் காண்போம்.

மிதவைக் காப்பு மையம் (Metacentre) : விலகலுறும் திரவத்தின் பருமன் மாறாத வகையில், மிதக்கும் பொருளைச் சற்றே சாய்த்து விட்டால், புதிய மிதவைத் திறன் மையத்தின் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோடு, பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும், முதலில் இருந்த மிதவைத் திறன் மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டினை எந்தப் புள்ளியில் சந்திக்கிறதோ, அதனை மிதவைக் காப்பு மையம் (Metacentre) என்கிறோம்.

மிதக்கும் பொருள் சமநிலையிலிருக்க, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G -யும், மிதவைத் திறன் மையம் H -ம் ஒரே செங்குத்துக் கோட்டில் இருக்க வேண்டும். இது பொருளைப் பொறுத்து ஒரு நிலையான கோடு. மிதக்கும் பொருளைச் சற்றே சாய்க்கும் போது (மூழ்கியுள்ள பருமன் மாறாதவாறு) புதிய மிதவைக் காப்பு மையம் H_1 எனில், H_1 -ன் வழியே செல்லும் செங்குத்துக் கோடு HG என்ற கோட்டை M என்ற புள்ளியில் வெட்டினால், M என்பது மிதவைக் காப்பு மைய மாகும். மிதவைக் காப்பு மையத்துக்கும், பொருளின்) புவியீர்ப்பு மையத்துக்கும் இடையிலுள்ள தொலைவு GM, மிதவைக் காப்புயரம் (metacentric height எனப்படும்.

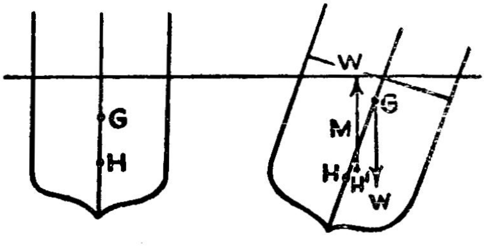
118. மிதக்கும் பொருளின் நிலைப்பாட்டிற்கான நிபந்தனை (Condition for stability of a floating body)

முதலில் மிதவைக் காப்பு மையம், புவியீர்ப்பு மையத்திற்கு மேலே உள்ள ஒரு மிதவையைக் காண்போம். பொருளின் எடை W, G -வழியே நேரே கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. திரவத்தின் அழுக்கம் W -க்குச் சமமாக இருப்பதோடு மிதவைத் திறன் மையம் H_1 -ன் வழியே செங்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. இவ் விரு விசைகளும், மிதக்கும் பொருள் சற்றே சாய்ந்த நிலையில், ஒரு இரட்டையைத் (Couple) தோற்றுவிக்கின்றன. இவ்விரட்டை மிதவையைப் பழைய நிலைக்குக் கொண்டு செல்லக் கூடியவாறு



படம் 127 படம் 127A

தகுந்த திசையில் திருப்புத் திறன் கொண்டிருப்பதால், மிதவை நிலைப்பாடுள்ள சம நிலையில் உள்ளது.



படம் 128

இப்போது மிதவைக் காப்பு மையம் M, G-யை விடக் கீழே உள்ள மிதவையின் சம நிலையைக் காண்போம். இங்கும் முன் போலவே பொருளின் எடை W கீழ் நோக்கியும் (G -யின் வழியே), திரவத்தின் அமுக்கம் H_1 -ன் வழியே மேல் நோக்கியும் செயல்

பட்டு, ஒரு இரட்டை (couple) தோற்றுவிக்கப்படுகிறது. ஆனால், இவ் விரட்டையின் திருப்புத் திறன் பொருளை மேலும் பழைய நிலையிலிருந்து விலகிச் செல்லுமாறு செய்வதால், சமநிலை நிலைப் பாடுடையதல்ல.

எனவே, மிதக்கும் பொருளின், மிதவைக் காப்பு மையம், பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தை விட மேலே இருந்தால், சமநிலை நிலைப்பாடுடையதாகவும், (stable), புவியீர்ப்பு மையத்தை விடக் கீழே இருந்தால், சமநிலை நிலைப்பாடற்றதாகவும் (unstable) உள்ள தென அறிகிறோம்.

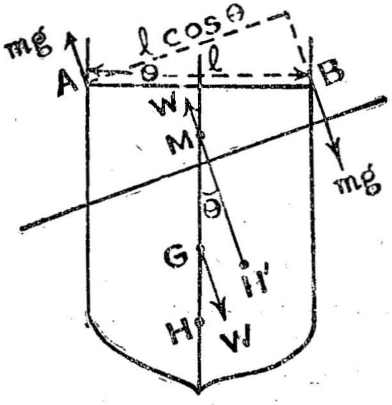
சம நிலையிலிருந்து சற்றே விலகியுள்ள மிதவையின் மிதவைத் தளமும், சம நிலையில் உள்ளபோது இருந்த மிதவைத் தளமும், சுழற்சி அச்சுக் கோட்டில் (axis of rotation) வெட்டிக் கொள் கின்றன. AK^2 என்பது இவ் வச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து மிதவைத் தளத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் (Moment of Inertia) எனவும், V என்பது இடம் பெயர்ந்த திரவத்தின் பருமன் எனவும் கொண்டால்,

$$HM = \frac{AK^2}{V} \qquad (118.1)$$

எனக் காட்ட இயலும். H என்பது சம நிலையில் மிதவைத் திறன் மையத்தையும், M என்பது மிதவைக் காப்பு மையத்தையும் குறிப்பன.

119. ஒரு கப்பலின் மிதவைக் காப்புயரம் காணல் (determination of metacentric height of a ship)

கப்பலின் எடை W எனக் கொள்வோம் இதனை இடப்பெயர்ச்சி முறையில் அறிந்துக் கொள்ளலாம். கப்பலின் தளத்தில் இரு



படம் 129

புறமும் ஒரே கொள்ளளவுள்ள இரு படகுகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன இவை A, B என்ற இடங்களில் உள்ளன என்போம். $AB = l$ எனவும் கொள்வோம். முதலில் A -யை முற்றிலும் நீரால் நிரப்புகிறோம். கப்பலின் கொடி மரத்தில் கட்டப்பட்ட குண்டு நூல் (plumb line) ஒன்றின் துணைகொண்டு அதன் குண்டு AB -க்கிணையான ஓர் அளவு கோலின் மீது காட்டும் அளவைக் குறித்துக் கொள்கிறோம். இப்போது A -யில் உள்ள நீரை நீக்கிவிட்டு, அதே அளவு நீரை B -யில் நிரப்புகிறோம். நிரப்பப்படும் நீரின் நிறை m ஆனல், mg என்ற எடை A -யிலிருந்து B -க்கு நகர்த்தப்பட்டுள்ளது. இதனல், B -கீழிறங்கும். குண்டு நூலின் குண்டு அளவு கோலில் நகரும் தொலைவைக் கொண்டு AB என்ற கோடு திரும்பியுள்ள கோணம் θ -வை அறிய இயலும்.

mg என்ற எடையை இடம் மாற்றுவதால் கப்பலின் மிதவைத் திறன் மையம் சம நிலையில் உள்ள H - என்ற புள்ளியிலிருந்து H_1 என்ற புள்ளிக்கு மாறுகிறது. G - என்பது கப்பலின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும், M மிதவைக் காப்பு மையத்தையும் குறித்தால், GM மிதவைக் காப்புயரமாகும்.

mg என்ற எடையை இடம் மாற்றியதால், தோன்றிய இரட்டையின் திருப்பு திறன்

$$= mg\,l\cos\theta \quad \text{ஆகும்.}$$

திரவத்தின் அமுக்கம் W -க்குச் சமமாகவும், H_1 - என்ற புள்ளியின் வழியே மேல் நோக்கியும், எடை W நேரே கீழ் நோக்கியும் செயல் படுகின்றன. எனவே, இதனல் தோன்றும் மீட்பு இரட்டையின் (restoring couple) திருப்புத் திறன்

$$= W \times GM \sin\theta$$

எனவே, சம நிலையில்

$$mg\,l\cos\theta = W \times GM\sin\theta$$

அல்லது,
$$GM = \frac{mg\,l}{W\tan\theta} \qquad (119.1)$$

θ சிறியதாக இருப்பதால் இதனை

$$GM = \frac{mg\,l}{W\,\theta} \qquad (119.2)$$

என எழுதலாம்.

இவ்வாறு சோதனை மூலம் கப்பலின் மிதவைக் காப்புயரத்தைக் கணக்கிட இயலும்.

120. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்க் கணக்கு (1): a என்ற பக்கம் திரவ மட்டத்திலுள்ளவாறு ஒரு திரவத்தில் செங்குத்தாக அமிழ்ந்துள்ள ஒரு செவ்வகப் பரப்பின் அழுத்த மையம், வளியழுத்தத்தையும் சேர்த்துக் கணக்கிடும் போது எவ்வாறு மாறும்? திரவ பாரமானியின் உயரம் h எனக் கொள்க.

வளியழுத்தம் இல்லாதபோது, செவ்வகப் பரப்பின் மீது செயல் படும் அழுக்கம்

$$= \frac{b}{2} \times ab \times \rho g \quad (a,\ b \text{ பக்கங்கள்})$$

இது திரவ மட்டத்திலிருந்து $\frac{2\,b}{3}$ என்ற ஆழத்திலுள்ள புள்ளியின் வழியே செயல்படுமாதலால், திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து இவ்வ முக்கத்தின் திருப்புத்திறன்

$$= \frac{b^2}{2}\rho g\, a \times \frac{2\,b}{3}$$

வளி அழுத்தத்தால் செவ்வகப் பரப்பின் மீது செயல்படும் அழுக்கம்

$$= a\, b \times h\, \rho g$$

இது திரவ மட்டத்திலிருந்து $\frac{b}{2}$ ஆழத்திலுள்ள செவ்வகப் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செயல்படும். திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து இவ்வ முக்கத்தின் திருப்புத்திறன்

$$= a\,b \times h\,\rho g \times \frac{b}{2}$$

இரண்டு அழுக்கங்களும் சேர்ந்து செயல்படும் போது, மொத்த அழுக்கம் செயல்படும் புதிய அழுத்த மையம் H ஆழத்திலிருந்தால் திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்து மொத்த அழுக்கத்தின் திருப்புத் திறன்

$$= \left(\frac{b^2}{2}\rho g\, a + a\, b\, h\, \rho g\right)\mathrm{H}$$

எனவே,

$$\mathrm{H}\left(\frac{b^2}{2}\, a\,\rho g + a\, b\, h\,\rho g\right) = a\,b\,\rho\, r g\,\frac{b}{2} + \frac{b^2}{2}\rho g\, a\,\frac{2\,b}{3}$$

$$H = \frac{a\,b^2\,\rho g\left(\frac{h}{2} + \frac{b}{3}\right)}{a\,b\,\rho g\left(\frac{b}{2} + h\right)}$$

அல்லது, $$H = \frac{b\,(3h + 2b)}{3\,(b + 2h)} \qquad (120.1)$$

விளக்கக் கணக்கு (2): ஒரு சதுரத் தகடு, செங்குத்தாக நீரில் அதன் மேற் பக்கம் நீர் மட்டத்திலிருந்து b ஆழத்தில் உள்ளவாறு அமிழ்த்தப் பட்டுள்ளது. a என்பது சதுரத்தின் பக்கமானுல் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து அதன் அழுத்த மையத்தின் தொலைவு $\left(\frac{a^2}{6a + 12\,b}\right)$ எனக்காட்டு.

சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் நீர் மட்டத்திலுள்ள போது அழுத்த மையம் $\frac{2a}{3}$ என்ற ஆழத்தில் P_1 என்ற புள்ளியில் இருக்கும். சதுரத்தின் மீது செயல்படும் அமுக்கம்

$$= \frac{a}{2}\,\rho g\,.\,a^2 = \frac{a^3\,\rho g}{2} \text{ ஆகும்.}$$

திரவத்தினுள் b ஆழம் அமுக்கப்படும் போது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அழுத்தம் $b\,\rho g$ என்ற அளவு அதிகரிக்குமாதலால், b ஆழத்தில் உள்ளபோது கூடுதல் அமுக்கம்

$$= \rho g\,.\,a^2.$$

இது சதுரத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் G -யின் வழியே செயல்படும்.

எனவே, மொத்த அமுக்கம்

$$= \frac{a^3}{2}\,\rho g + a^2\,\rho g\,b$$

இது G -க்குக் கீழே x -என்ற தொலைவில் உள்ள P_2 என்ற புள்ளியில் செயல்படுவதாகக் கொள்வோம். இப்போது சதுரம் b என்ற ஆழத்தில் உள்ள போது

P_1 -ன் ஆழம் $= b + \frac{2\,a}{3}$

G -யின் ஆழம் $= b + \frac{a}{2}$

P_2 -வின் ஆழம் $= b + \frac{a}{3} + x$

எனவே, திரவ மட்டத்தைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$\left[\frac{a^3 \rho g}{2} + a^2 \rho g\, b\right]\left(b + \frac{a}{2} + x\right)$$

$$= \frac{a^3 \rho g}{2}\left(b + \frac{2a}{3}\right) + a^2 \rho g\, b \left(b + \frac{a}{2}\right)$$

$$\therefore \quad (3a + 6b)\left(b + \frac{a}{2} + x\right) = 3a\left(b + \frac{2a}{3}\right) + 6b\left(b + \frac{a}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{3a^2}{2} + 3ab + (3a + 6b)\,x = 3ab + 2a^2$$

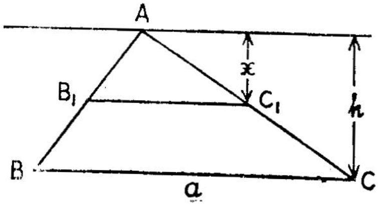
$$\therefore \quad x = \frac{2a^2 - \frac{3a^2}{2}}{3a + 6b}$$

$$= \frac{a^2}{6a + 12b}$$

எனவே, h ஆழத்தில் உள்ள சதுரத்தின் அழுத்த மையம், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்துக்குக் கீழே $\left(\frac{a^2}{6a + 12b}\right)$ என்ற தொலைவில் உள்ளது.

விளக்கக் கணக்கு (3): அடிப்பக்கம் கிடைமட்டத்துக் கிணையாகவும் மேல் முனை திரவ மட்டத்திலும் உள்ளவாறு திரவத்துள் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு முக்கோணப் பரப்பின் மீது கிடைத்தளத்துக் கிணையான கோடொன்று வரைந்து, முக்கோணத்தின் இரு பகுதிகளிலும் அமுக்கங்கள் சமமாயிருக்குமாறு செய்யப்பட்டால், அக் கோட்டின் ஆழம் என்ன?

A என்பது முக்கோணத்தின் முனை யெனவும், அடிப்பக்கம் BC = a எனவும், BC -யின் ஆழம் திரவ மட்டத்திலிருந்து h என



படம் 130

வும் கொள்வோம். அமுக்கங்கள் இரு பகுதிகளின் மீதும் சம அளவில் உள்ளவாறு பிரிக்கும் கோடு B_1C_1 என்போம். திரவ மட்டத்திலிருந்து இதன் ஆழம் x என்போம்.

இப்போது, $\frac{B_1C_1}{a} = \frac{x}{h}$ ஆதலால்,

$$B_1C_1 = \frac{x\,a}{h} \text{ ஆகும்.}$$

AB_1C_1 என்ற முக்கோணப் பரப்பின் மீது அமுக்கம் = புவியீர்ப்பு மையத்தில் அழுத்தம் $\times AB_1C_1$ -ன் பரப்பு

$$= \frac{2}{3}\; x\,\rho g \times \frac{1}{2}\,\frac{xa}{h}\,.\,x$$

$$= \frac{x^3\,a\,\rho g}{3h}$$

ABC என்ற முக்கோணத்தின் மீது அமுக்கம்

$$= \frac{2}{3}\; h\,\rho g \times \tfrac{1}{2}\,ah$$

$$= \frac{1}{3}\; h^2\,a\,\rho g$$

இது முக்கோணம் AB_1C_1 -ன்மீது செயல்படும் அமுக்கத்தைப் போல் இரு மடங்காதலால்,

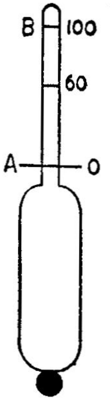
$$\frac{2\,x^3\,a\,\rho g}{3h} = \frac{h^2\,a\,\rho g}{3}$$

அல்லது, $$x^3 = \frac{h^3}{2}$$

எனவே, $$x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$$

எனவே, $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ என்ற ஆழத்தில் B_1C_1 இருக்க வேண்டும்.

விளக்கக் கணக்கு (4): ஒரு பொதுத் திரவமானியின் தண்டு 100 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. நீரில் மிதக்கும் போது O என்ற பிரிவு வரையும், 0.8 ஒப்பு அடர்த்தியுள்ள திரவமொன்றில் 100 என்ற பிரிவு வரையும் அது அமிழ்ந்துள்ளது. அதே திரவமானி ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும் போது 60 என்ற பிரிவு வரை அமிழ்ந்திருந்தால், அத் திரவத்தின் ஒப்பு அடர்த்தி என்ன?



படம் 131

A என்ற புள்ளி O என்ற பிரிவையும் B என்ற புள்ளி 100 என்ற பிரிவையும் குறிக்கட்டும். A -க்கும் கீழே திரவமானியின் பருமன் V எனக் கொள்வோம். எனவே, விலக்கப்பட்ட நீரின் நிறை V கிராம் ஆகும்: எனவே, B -வரை அமிழ்ந்துள்ளபோது விலக்கப் பட்ட திரவத்தின் நிறையும் V கிராம் ஆகும். எனவே, B -க் கீழே திரவமானியின் பருமன் $= \frac{V}{0.8}$ க.செ.மீ, ஆகும்.

எனவே, AB -யின் பருமன் $\frac{V}{0.8} - V = 0.25\,V$ எனவே 60 -வது பிரிவு வரை அமிழ்ந்துள்ள போது திரவத்தினுள் உள்ள பகுதியின் பருமன்

$$= V + \frac{0.25}{100} \times 60\,V$$

$$= 1.15\,V$$

திரவத்தின் அடர்த்தி ρ ஆனால், திரவமானியின் எடை

$$= 1.15\,V \times \rho$$

ஆனால், திரவமானியின் எடை $= V$ ஆதலால்,

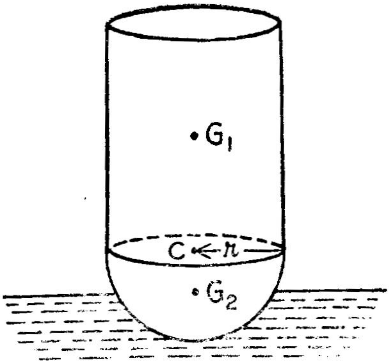
$$1.15\,V \,.\, \rho = V$$

அல்லது $\rho = \frac{1}{1.15} = 0.87$

எனவே, திரவத்தின் அடர்த்தி $= 0.87$

விளக்கக் கணக்கு (5): அடிப்புறம் அரைக்கோள வடிவில் உள்ள ஓர் உள்ளீடற்ற உருளை (hollow cylinder) வடிவக் கலமொன்று அரைக் கோளப் பகுதியில் ஓரளவு அமிழ்ந்துள்ளவாறு மிதக்கிறது. அரைக்கோள ஓடும், உள்ளீடற்ற உருளையும் சீரான தடிப்புள்ள தாக இருந்தால், சமநிலை நிலைப்புடனிருக்கக் கூடிய வகையில் உருளையின் மீப்பெரும உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

கோளத்தின் மையப்புள்ளி C ஆனால், மிதவைக் காப்பு மையமும் C ஆகும். r என்பது உருளை, கோளம் ஆகியவற்றின் ஆரமென்போம்.



படம் 132

சம நிலை நிலைப்புடனிருக்குமாறுள்ள உருளையின் பெரும உயரம் h என்போம். மிதக்கும் பொருள் நிலைப்புடனிருக்க மிதவைக் காப்பு மையம், புவியீர்ப்பு மையத்துக்கு மேல் இருக்க வேண்டுமாதலால், h - பெரும மதிப்புட னிருக்கும்போது, மிதவைக் காப்பு மையம், இரண்டும் C -யில் இருக்க வேண்டும்.

உருளைப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் C -க்கு மேல் $\frac{h}{2}$ உயரத்தில் G_1 என்ற புள்ளியில் இருக்கும். கோள ஒட்டுப் பகுதியின் புவியீர்ப்பு மையம் G_2, C -க்குக் கீழே $\frac{r}{2}$ ஆழத்தில் இருக்கும். நிறைகள் பரப்புக்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்க வேண்டுமாதலால், மிதவையின் புவியீர்ப்பு மையம் C -யைப் பொறுத்த திருப்புத் திறன்களைக் கணக்கிட்டால்,

$$2\pi\ r\,h.\frac{h}{2} = 2\pi\ r^2 . \frac{r}{2}$$ எனக் கிடைக்கும்.

இதனால், $x = r$

எனவே, உருளைப் பகுதியின் பெரும உயரம் r ஆகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்:

(1) அடிப்பக்கம் திரவ மட்டத்திலுள்ளவாறு ஒரு திரவத்தில் செங்குத்தாக அமிழ்ந்துள்ள ஒரு முக்கோணப் பரப்பை, எந்த இடத்தில் கிடைத் தளத்திற்கிணையாக ஒரு கோடு வரையப்பட்டால், பரப்பின் இரு பகுதிகளின் மீதும் சம அளவுள்ள அழுத்தங்கள் செயல்படுமாறு பிரிக்கலாம்?

(2) ஒரு செவ்வக வடிவ மதகுக் கதவின் ஒரு புறம் *a* என்ற உயரத்துக்கும், மறுபுறம் *b* என்ற உயரத்துக்கும் நீர் நின்றால், எந்தப் புள்ளியின் வழியே தொகுபயன் அமுக்கம் (resultant thrust) செயல்படும்?

(3) ஒரு பக்கம் திரவ மட்டத்திலுள்ளவாறு திரவத்துள் அமிழ்ந்துள்ள ஒரு செவ்வகப் பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்துக்கும், அழுத்த மையத்திற்கு மிடையே யுள்ள தொலைவு $\frac{k^2}{h}$ எனக் காட்டு. *k* என்பது புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழியே செல்லும் கிடைத்தள அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்த சுழற்சி ஆரத்தையும் (radius of gyration), *h* என்பது புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழத்தை யும் குறிக்கின்றன.

(4) ABCD என்ற இணைகரப் பரப்பு ஒரு முனை A திரவ மட்டத்திலும், BD என்ற மூலை விட்டம் கிடைத் தளத்துக்கிணை யாகவும் உள்ளவாறு ஒரு திரவத்துள் அமிழ்ந்திருந்தால், அதன் அழுத்த மையம் AC -யை 7 : 5 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமெனக் காட்டு.

(5) 1 மீட்டர் பக்கமுடைய ஒரு கனசதுர வடிவக் கலத்தின் ஒரு செங்குத்துப் பக்கத்திலிருந்து ஒரு முக்கோணப் பகுதி வெட்டி யெடுக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணத்தின் அடிப் பக்கம் (base) சதுர வடிவப் பக்கத்தின் மேற் பக்கமாகவும், அதன் முனை கீழ்ப் பக்கத்தின் மையப் புள்ளியில் முக்கோணம் ஒரு கீல் (hinge) மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தின் மையப் புள்ளி கன சதுரத்தில் அதற்கு எதிரே உள்ள பக்கத்தின் மையப் புள்ளியுடன் ஒரு கயிற்றால் இணைக்கப் பட்டிருந்தால், கலத்தை நீரால் நிரப்பும்போது கயிற்றின் இழுவிசையைக் கணக்கிடுக.

(6) ஒரு பொதுத் திரவ மானியின் தண்டின் விட்டம் 0.6 செ.மீ. தண்டின் மீது 1.00 என்ற குறியீடு வரை குமிழ், தண்டு ஆகியவற்றின் பருமன் 100 க.செ.மீ. என்றால், 1.05, 1.10 என்ற குறியீடுகளுக் கிடையே யுள்ள தொலைவைக் கணக்கிடு.

(7) ஒரு பொதுத் திரவ மானியின் தண்டு உருளை வடிவத்தி லுள்ளது. தண்டின் மேல்முனையில் உள்ள குறியீடு 1.00 என்ற ஒப்படர்த்தியையும், அடிப்புற முனையில் உள்ள குறியீடு 1.2 என்ற ஒப்படர்த்தியையும் குறித்தால், இரு குறியீடுகளுக்கும் சம தொலைவு களில் நடுவே உள்ள குறியீடு குறிப்பிடும் ஒப்படர்த்தி எவ்வளவு?

(8) ஒரு பொதுத் திரவமானி நீரில் அதன் பருமனில் $\frac{9}{10}$

பங்கு மூழ்கியுள்ளவாறும், பாலில் $\frac{90}{103}$ பங்கு மூழ்கியுள்ளவாறும் மிதந்தால் பாலின் ஒப்படர்த்தியைக் கணக்கிடுக.

(9) ஒரு பொதுத் திரவ மானியின் பருமன் 12 க.செ.மீ. அதனை 0.8 ஒப்படர்த்தியுள்ள திரவத்தில் மிதக்க விட்டால், அதன் பருமனில் எவ்வளவு பங்கு திரவத்தில் மூழ்கியிருக்கும்? திரவமானி யின் எடை 8 கிராம் எனக் கொள்க.

(10) முறையே 1.1, 1.25 ஒப்படர்த்திகள் கொண்ட திரவங் களில் மிதக்க விடும்போது ஒரு திரவமானியின் தண்டு முறையே 4 செ.மீ, 10 செ.மீ. உயரங்கள் வெளியே நீட்டிக் கொண்டுள்ளது. மற்ரொரு திரவத்தில் மிதக்கும்போது அதன் தண்டு 8 செ.மீ. நீளம் வெளியே நீட்டிக் கொண்டிருந்தால், அத் திரவத்தின் அடர்த்தி என்ன?

(11) ஒரு அரைக் கோளத்தின் மீது ஒரு கூம்பு பொறுத்தப் பட்டுள்ளது. இவ் வமைப்பு அரைக்கோளப் பகுதி ஓரளவு திரவத் தில் உள்ளவாறு மிதக்கிறது. சமநிலை நிலைப்புடனிருக்குமாறு இருக்கக் கூடிய கூம்பின் பெரும உயரம் அதன் அடிப்பக்கத்தின் ஆரத்தைப் போல் $\sqrt{3}$ மடங்கு எனக் காட்டுக.

(12) ஒரு கப்பலின் தளத்தின் குறுக்கே 15 மீட்டர் தொலைவு 15000 கிலோ கிராம் எடையை நகர்த்தும்போது கப்பலின் தளத்தி லிருந்து 30 மீட்டர் உயரத்திலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஊசற் குண்டு தளத்திற் கிணையான அளவு கோலில் 50 செ.மீ. தொலைவு நகர்கிறது. கப்பலின் எடை 8×10^{6} கிலோ கிராமானுல், மிதவைக் காப்புயரத்தைக் கணக்கிடு.

(13) 30,000கிலோ கிராம் எடையை ஒரு கப்பலின் குறுக்கே 25 மீட்டர் தொலைவு நகர்த்தினுல், கப்பல் 1° சாய்கிறது. கப்பலின் நிறை 2×10^{7} கிலோ கிராமானுல், மிதவைக் காப்புயரத்தைக் கணக்கிடு.

121. வளி யழுத்தம் (atmospheric Pressure)

ஆக்சிஜன், நைட்ரஜன், கார்பன்-டை-ஆக்ஸைடு முதலிய வாயுக்களின் கலவையாலான காற்றுப் பகுதி இந் நிலவுலகைச் சூழ்ந்துள்ளதை அனைவரும் அறிவோம். இந்தக் காற்றுப் பகுதி தரைக்கு மேலே ஏறத்தாழ 300 கிலோ மீட்டர் உயரத்திற்குப் பரவியுள்ளது. காற்றின் அடர்த்தி 1.293 கிலோகிராம்/கனமீட்டர் என்ருலும், அது தரையின் ஒவ்வொரு புள்ளி மீதும் செலுத்தும் அழுத்தம் ஏறத்தாழ 10^{5} நியூட்டன் / சதுரமீட்டருக்குச் சமமான தாகும். இதனை வளி அழுத்தம் (atmospheric Pressure) என்கிருேம்.

இந்த வளி அழுத்தம் உயரத்தைப் பொறுத்து மாறுபடுதலால் படித்தர வளி அழுத்தமாக (Standard atmospheric Pressure) கடல் மட்டத்தில் வளி மண்டலத்தின் அழுத்தத்தை எடுத்துக் கொள்கிறோம். கடல் மட்டத்தில் வளியழுத்தத்தின் மதிப்பு 1.013×10^5 நியூட்டன்/சதுரமீட்டர் ஆகும். இது 1.013×16^6 டைன்/சதுர செ.மீ. -க்குச் சமமானதாகும். இம்மதிப்பை முதலில் கண்டறிந்தவர் டாரிசெல்லி (Toricelli) என்பவர். (1644-ம் ஆண்டு. சோதனைச்சாலையில் வளியழுத்தத்தை ஃபார்ட்டின் பாரமானி (Fortin's barometer) யின் துணை கொண்டு அறிகிறோம்.

உயரத்தைப் பொறுத்து வளியழுத்த மாறுபாடு (Variation of atmospheric pressure with height) :

தரை மட்டத்திலிருந்து x, $x+dx$ ஆகிய உயரங்களில் வளி அழுத்தங்கள் முறையே p, $p+dp$ எனக் கொள்வோம். தரையிலிருந்து x -உயரத்தில் a -என்ற குறுக்குப்பரப்புள்ள ஒரு செங்குத்துக் காற்றுப் பகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். இக் காற்றுப் பகுதியின் நீளம் dx என்போம். dx சிறியதாக இருந்தால் அடர்த்தி மாறுபடுவது மிகக் குறைவானதாதலால், இப்பகுதியின் சராசரி அடர்த்தி ρ எனக் கொள்வோம்.

இந்தக் காற்றுப்பகுதி பின்வரும் மூன்று விசைகள் செயல் பட்டுச் சமநிலையில் உள்ளது : (i) காற்றுப் பகுதியின் எடை $a\rho g\,dx$ நேரே செங்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. (ii) இப்பகுதியின் மேற்பரப்பில் அழுத்தம் $(p+dx)$ ஆதலால், அமுக்கம் $(p+dp)\,a$ நேரே செங்குத்துத்தாகக் கீழ்நோக்கிச் செயல் படும். (iii) காற்றுப்பகுதியின் அடிப்பரப்பில் அழுத்தம் p ஆதலால், pa என்ற அமுக்கம் செங்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படுகிறது.

எனவே, சமநிலையில்,

$$p\,a = (p+dp)\,a + a\rho g\,dx \qquad (121.1)$$

அல்லது,
$$dp = -\rho g\,dx \qquad (121.2)$$

இக்காற்றுப்பகுதியின் வெப்பநிலை நிலையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். அவ்வாறாயின், **பாயில்** விதிப்படி (Boyle's law) அழுத்தம் $p \propto v$ ஆதலால்,

$$p = k\rho \qquad (121.3)$$

என எழுதலாம். $\left(\text{ஏனெனில் பருமன் } v = \frac{\text{நிறை}}{\rho} = \frac{m}{\rho}\right)$

எனவே, சமன்பாடு (121.2) - ஐ

$$dp = -\frac{p}{k} g\, dx \qquad (121.4)$$

என எழுதலாம்.

$$\therefore \frac{dp}{p} = -\frac{g}{k} dx$$

இதன் தொகு ஆக்கம் (Integration) கண்டால்,

$$\log_e p = -\frac{g x}{k} + C \qquad (121.5)$$

எனக் கிடைக்கும். C என்பது தொகை மாறிலி (Constant of Integration)

தரைமட்டத்தில் வளி அழுத்தம் p_0 எனக்கொண்டால் $x = 0$ எனும் போது $p = p_0$ ஆகும். எனவே,

$C = \log_e p_0$ ஆதலால், சமன்பாடு (121·5) -லிருந்து

$$\log_e p = -\frac{g}{k} x + \log_e p_0$$

$$\therefore \log_e \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\frac{g}{k} x \qquad (121.6)$$

அல்லது $$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{g}{k} x}$$

எனவே, $$p = p_0 e^{-\frac{g}{k} \cdot x} \qquad (121.7)$$

அழுத்தம் அடர்த்திக்கு நேர்விகிதத்திலிருந்தால், இதனை

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{g}{k} x} \qquad (121 \cdot 8)$$

எனவும் எழுதலாம்.

மேலும் சமன்பாடு (121.7) -லிருந்து $x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ என்ற உயரங்களில் வளி அழுத்தங்களின் மதிப்பு முறையே $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots$ ஆனால்,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} = \text{ஓர் மாறிலி} \qquad (121.9)$$

எனக் காண்கிறோம். எனவே, உயரங்கள் கூட்டுத் தொடர் வரிசையிலிருந்தால், அவ் வுயரங்களில் வளியழுத்தங்களின் மதிப்புகள் முறையே பெருக்குத் தொடர் (geometric progression) வரிசையிலிருக்கின்றன.

122. வளியழுத்தங்களைக் கொண்டு உயரங்களைக் கணக்கிடுதல் (to find the altitudes from barometric heights).

கடல் மட்டத்துக்கு மேலே முறையே h_1, h_2 என்ற உயரங்களில் பாரமானி காட்டும் பாதரச உயரங்கள் முறையே H_1, H_2 என்றால், அவ்வுயரங்களில் அழுத்தங்கள் p_1, p_2 என்போம். அவ்வாறானால்,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{H_1}{H_2} \text{ ஆகும்.}$$

சமன்பாடு (121.5) -லிருந்து

$$\mathrm{lcg}_e\, p_1 + \frac{g}{k}\ {}_1 = \log_e p_2 + \frac{g}{k} h_2$$

எனவே, $$\log_e\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{g}{k}(h_2 - h_1)$$

அல்லது, $$\log_e\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = \frac{g}{k}(h_2 - h_1)$$

இதிலிருந்து

$$h_2 - h_1 = \frac{k}{g}\log_e\left(\frac{H_2}{H_1}\right) \qquad (122.1)$$

எனப் பெறுகிறோம். இச் சமன்பாடு h_1, h_2 என்ற உயரங்களின் வேறுபாட்டைக் கொடுக்கிறது. H_1, H_2 முதலியவை அவ்விடங்களில் முறையே பாரமானி காட்டும் உயர அளவீடுகளாகும்.

தரை மட்டத்தில் வளியழுத்தம் $p = 1.013\times 10^5$ நியூட்டன்/சதுர மீட்டர் எனவும் காற்றின் அடர்த்தி 1.293 கிலோகிராம்/கன மீட்டர் எனவும் அறிவோம். எனவே,

$$k = \frac{P}{\rho} = \frac{1{,}013\times 10^5}{1.293} \qquad (122.2)$$

மேலும் $g = 9.8$ மீட்டர்/(செகண்டு)^2 எனவும் அறிவோம்.

எனவே, சமன்பாடு (122.1) -லிருந்து $(h_2 - h_1)$ -ன் மதிப்பையறிய இயலும்.

இம் முறையில் ஒரு இடத்தின் உயரத்தைப் பாரமானியின் துணைகொண்டு அறிய இயலும்.

123. ஓரியல் வளிமண்டல உயரம் (height of homogeneous atmosphere)

படித்தர வளியழுத்தத்துக்குச் சமமான அழுத்தத்தைத் தோற்றுவிக்கக் கூடிய, சீரான அடர்த்தி கொண்ட காற்று மண்டலத்தின் உயரத்தை ஓரியல் வளி மண்டல உயரம் (height of homogeneous atmosphere) என்கிறோம்.

சீரான அடர்த்தியாக கடல் மட்டத்தில் காற்றின் அடர்த்தியை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் மதிப்பு 1.293 கிலோகிராம்/கன மீட்டர். படித்தர அழுத்தம் 1.013×10^5 நியூட்டன்/சதுர மீட்டர் ஆதலால், H என்பது ஓரியல் வளி மண்டல உயரமானால்,

$$H \times 1.293 \times 9.8 = 1.013 \times 10^5$$

அல்லது, $H = 8 \times 10^3$ மீட்டர் (123.1)

எனவே, $H \doteq 8$ கிலோ மீட்டர்.

உயரே செல்லச் செல்லக் காற்றின் அடர்த்தி குறைந்து கொண்டேவருதலால், வளி மண்டல உயரம் 8 கிலோ மீட்டரை விட மிக மிக அதிகமாக உள்ளது.

மேலும், $p = H \rho g$ ஆதலால்,

சமன்பாடு (121.3) -லிருந்து,

$$k = H g$$

எனவே, சமன்பாடு (121.5) -ஐ

$$\log_e\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{x}{H}$$

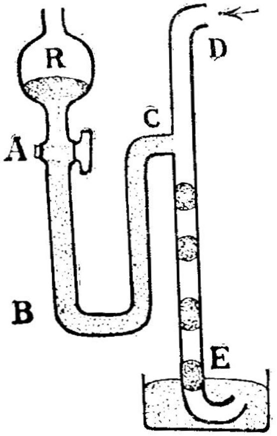
என எழுதலாம்.

ஆதலால்,

$$p = p_0\, e^{-\frac{x}{H}} \qquad (123.2)$$

124. ஸ்பிரெஞ்சல் பாதரசப் பம்பு (Sprengel's mercury pump)

ஒரு கலத்திலுள்ள காற்றின் அழுத்தத்தை 10^{-6} மீட்டர் பாதரச உயரத்துக்குக் (1 மீட்டர் பாதரச உயரம் என்பது 1 மீட்டர் நீளமுள்ள பாதரசக் கம்பம் செலுத்தும் அழுத்தத்தைக் குறிக்கும்.) குறைப்பதற்குப் பாதரசப் பம்புகள் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. ஸ்பிரெஞ்சல் (Sprengel's) பாதரசப் பம்பின் அமைப்பைக் காண்போம்.



படம் 133

ABC என்ற U -வடிவக் குழாயின் ஒரு முனை A யுடன் ஒரு தேக்கி (Reservoir) R இணைக்கப்பட்டுள்ளது மறுபுரம் C -யில் DE என்ற ஒரு செங்குத்தான சிறு குழாய் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. DE யின் மேல் முனை D வெற்றிடமாக்கப் பட வேண்டிய கலத்துடன் இணைக்கப்படுகிறது. E என்ற கீழ் முனை பாதரசம் வைக்கப்பட்டுள்ள கிண்ணத்துள் அமிழ்ந்துள்ளவாறு அமைக்கப் பட்டுள்ளது. CE -யின் நீளம் 0.76 மீட்டருக்கு அதிகமாக இருக்குமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. R -ல் உள்ள பாதரசத்தை ABC -என்ற குழாயுள் விடவோ அல்லது விடாமல் தடுக்கவோ A என்ற முனைக் கருகில் ஒரு அடைப்பான் உள்ளது.

அடைப்பானைத் திறந்தால் பாதரசம் R -லிருந்து கீழிறங்கி ABC என்ற குழாயை நிரப்பும். மேலும் பாதரசம் இறங்கும்போது C யின் வழியாக DE என்ற குழாயினுள் பாதரசம் செல்லும். C -யைத் தாண்டியவுடன் பாதரசம் கீழ் நோக்கிச் செல்லும். இவ்வாறு விட்டு விட்டு DE -யில் பாதரசம் இறங்குதலால், பாதரசத் துளிகளுக் கிடையே காற்று அடைபட்டுக் கீழே செல்லும், கீழே செல்லும் காற்று கிண்ணத்திலுள்ள பாதரசத்தின் வழியே வெளியேறும்.

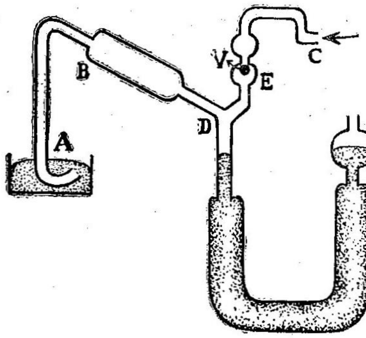
கலத்தில் காற்றழுத்தம் கொஞ்சம் கொஞ்சமாகக் குறைந்து கொண்டே வரும். இப்போது சிறிது சிறிதாக DE என்ற குழாயில் பாதரசம் மேலேறி நிற்கும். கலத்தின் காற்றழுத்தம் ஏறத்தாழ வெற்றிடமாகும் நிலையில் DE -யில் பாதரசம் உயரம் ஏறத்தாழ 76 செ.மீ. உயரத்திற்கு நிற்கும். கிண்ணத்தில் வந்து சேரும் பாதரசத்தை அடிக்கடி தேக்கிக்கு மாற்றிக் கொண்டே இருக்க வேண்டும். BC என்ற வளைந்த குழாயில் உள்ள பாதரசம் காற்று வெற்றிடமாக்கப்படும் கலத்துள் நுழைவதைத் தடுத்து நிற்கிறது.

வெற்றிடமாக்கப்பட்ட கலத்தின் அழுத்தத்தை இந்தப் பம்பின் மூலமே அளந்து கொள்ளலாம். பாதரசப் பாரமானியின் உயரத்துக்கும் DE என்ற குழாயில் பாதரச உயரத்துக்கும் உள்ள வேறுபாடு, கலத்தின் அழுத்தத்தைப் பாதரச உயரத்தில் நேரடியாகக் கொடுக்கும்.

இந்தப் பம்பில் உள்ள ஒரே ஒரு குறை என்னவென்றால், இது மெதுவாகச் சோர்வூட்டும் வகையில் வேலை செய்வதே. ஆனால் கலத்தில் காற்றுப் புகாவண்ணம் நன்கு தடுக்கப்படுவதோடு, தொல்லை தரும் ஒரு வழி அடைப்புகள் (valves) இதில் கிடையாது.

125. டோப்ளா பம்பு (Toepler pump)

AB, CD என்ற, ஏறத்தாழ 90 செ.மீ. நீளங்கள் உள்ள இரு செங்குத்தான குழாய்கள் BC என்ற சற்று அகன்ற குழாயின் இரு முனைகளில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. AB என்ற குழாயின் உள் விட்டம் ஏறத்தாழ 1 மி. மீ. ஆகும். அதன் முனை A, ஒரு கிண்ணத்



படம் 134

தில் உள்ள பாதரசத்துள் அமிழ்ந்திருக்கும். CD என்ற குழாயின் C என்ற முனைக்குச் சற்று மேலே அகன்ற குழாயுடன் E என்ற ஒரு பக்கக் குழாய் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இக் குழாய் E ஓர் இரட்டைக் குமிழ் (double bulb) மூலமாக வெற்றிடமாக்கப் பட வேண்டிய கலத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இரட்டைக் குமிழில் ஒன்றினுள் பாதரசத்தில் மிதக்கக் கூடிய வால்வு V ஒன்றுள்ளது. பாதரசம் இரட்டைக் குமிழுள் மேலேறும் போது இந்த வால்வு இரு குமிழ்களையும் இணைக்கும் சிறு குழாயை அடைத்துக் கொள்ளும். CD என்ற செங்குத்துக் குழாயின் D என்ற முனை தடித்த இரப்பர் குழாயின் மூலம் R என்ற தேக்கியுடன் (Reservoir) இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

R-ஐத் தகுந்த அளவுக்குக் கீழிறக்கினால், பாதரச மட்டம் C-க்குக் கீழே இறங்கும். இப்போது வெற்றிடமாக்கப்பட வேண்டிய காற்று BC என்ற குழாய்வரை அடைத்து நிற்கும். மீண்டும் R-ஐ மேலேற்றும் போது, பாதரசம் CD-என்ற குழாயில் மேலேறி E என்ற குழாயை அடைத்து BC-யிலும் இரட்டைக்

குமிழினுள்ளும் மேலேறும். இரட்டைக் குமிழில் மேலே செல்வதை V என்ற வால்வு தடுத்து விடும். எனவே, மேலும் R -ஐ உயர்த்தும் போது பாதரசம் BC -யில் அடைப்பட்ட காற்றைத் தள்ளிக் கொண்டு AB என்ற குழாயின் வழியே கீழிறங்குவதால், காற்று A -யின் வழியே வெளியேறும். மீண்டும் R-ஐக் கீழிறக்கினால், பாதரச மட்டம் C -யை விடக் கீழிறங்கும் போது கலத்திலுள்ள காற்று மீண்டும் BC -யை நிரப்பி நிரவி நிற்கும். மீண்டும் R-ஐ மேலேற்றும் போது, BC -யில் உள்ள காற்று வெளியேற்றப்படும். இவ்வாறு திரும்பத் திரும்பச் செய்து, கலத்தின் அழுத்தத்தை 10^{-6} மீட்டர் பாதரச உயரத்துக்குக் குறைக்க இயலும். கிண்ணத்தி லிருந்து தேக்கிக்குப் பாதரசத்தைத் தேவையான இடைவெளிக் கொரு முறை மாற்றிக் கொண்டே இருக்க வேண்டும்.

இந்தப் பம்பு இயங்கும் முறையும் சோர்வூட்டுவதாக அமைந்ததே. மேலும், பாதரச ஆவி அழுத்தம், அழுத்தத்தை குறிப்பிட்ட அளவுக்கு மேல் குறைய விடாது.

126. மூலக்கூறு பம்புகள் (Molecular pumps)

காற்றழுத்தத்தை 10^{-6} மில்லி மீட்டர் பாதரச உயரத்துக்குக் குறைக்க 'மூலக்கூறு பம்புகள்' (Molecular pumps) பயன்படுத்தப் பட்டன. இத்தகைய பம்பினை முதலில் காடே (Gaede) என்பவர் உருவாக்கினார்.

ஒரு உருளை தனது அச்சுக் கோட்டைப் பொறுத்து மிக வேக மாகச் சுழலும்போது, அதன் வெளிப்பரப் பருகே யுள்ள காற்று மூலக் கூறுகளையும் இழுத்துச் செல்ல முயலுகிறது. இதனைச் சுற்றி மற்றொரு உள்ளீடற்ற உருளையில் இரு துளைகள் உள்ளன. ஒன்றின் வழியே வெற்றிடமாக்கப்பட வேண்டிய கலத்திலிருந்து காற்று உள்ளிழுக்கப்பட்டு, மற்றொரு துளையின் வழியே வெளியேறுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. வெளி வரும் காற்று ஒரு துணைப்பம்பினால் உறிஞ்சப்படும்.

உட்புற உருளை வேகமாகச் சுழலும்போது, இரு துளைகளுக் கிடையேயுள்ள அழுத்த வேறுபாடு,

$$P_2 - P_1 = dP = \frac{6\,\eta\, v\, l}{h^2} \qquad (126.1)$$

எனக் காட்டலாம். இதில் η -வாயுவின் பாகுநிலை எண் (Coefficient of viscosity) ஐயும், v - உருளையின் சுழற்சி வேகத்தையும், l -இரு துளைகளுக் கிடையேயுள்ள தொலைவையும், h என்பது உட்புற உருளைக்கு மிடையேயுள்ள இடைவெளியையும் குறிக்கின்றன.

சமன்பாடு (126.1), வாயுவின் மோதலிடைத் தூரம் (Mean free path) h -ஐ விடக் குறைவாக உள்ளபோதுதான் பொருந்துவ

தாகும். சாதாரண அழுத்தங்களில் *n* மாறுவதில்லை யாதலால், *v* -யின் மதிப்பு மாறாதபோது $(P_2 - P_1)$ மாறுவதில்லை.

அழுத்தம் குறைவாக உள்ளபோது, மோதலிடைத் தூரம் அதிகமாக இருத்தலால், மூலக்கூறுகளிடையே நிகழும்மோதல் களின் எண்ணிக்கையைவிட, மூலக்கூறுகள் பம்பின் சுவர்களின்மீது மோதும் மோதல்களின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும். இந் நிலையில் *v* -மாறாதபோது,

$$\frac{P_2}{P_1} = e^{cv} \qquad (126.2)$$

என காடே (Gaede) காட்டியுள்ளார். (இதில் c ஓர் மாறிலி)

காடே அமைத்த மூலக்கூறு பம்பில் உட்புற உருளையின் புறப் பரப்பில் வரி வரியாகப் 12 பள்ளங்கள் இருந்தன. இவைகளின் ஆழங்கள் படிப்படியாக அதிகரிக்குமாறு அமைக்கப்பட்டிருந்தன. வெளிப்புற நிலையான உருளைக்கும் (stator), சுழலும் உருளைக்கும் (rotar) இடையே இடைவெளி ஏறத்தாழ 0.03 மில்லி மீட்டர் இருந்தது. விளிம்பில் உள்ள 12 பள்ளங்களும் இணைப்புப் பள்ளங் கள் மூலம், குறுக்காக ஒன்றோடொன்று இணைக்கப் பட்டிருந்தன. 12 பள்ளங்களுடனும் ஏறத்தாழச் சரியாகப் பொருந்தும் வகையில் (ஆனால் தொடாமல்) உள்ளீடற்ற வெளிப்புற உருளையின் உட்புறத் தில் வரிவரியான அமைப்புகள் இருந்தன.

உள்ளே வரும் வாயு உருளையின் மையப் பகுதியில் நுழையும். நுழையுமிடத்தில் வாயுவின் அழுத்தம் குறைவாகவும், பள்ளங்கள் வழியே வர வர அழுத்தம் அதிகமாகவும் உள்ளவாறு அமைக்கப் பட்டு, இறுதியில் வெளியேறும் குழாயுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள துணைப் பம்பினால் வாயு உறிஞ்சப்படுகிறது.

இதே முறையில் ஹால்வெக் (Holweck) என்பவர் பின்னர் அமைத்த மூலக் கூறு பம்பின் அமைப்பு பின்வருமாறு இருந்தது. சுழலும் உருளையில் பள்ளங்கள் இருக்கவில்லை. ஆனால், நிலையான உள்ளீடற்ற உருளையின் உட்புறத்தில் பள்ளங்கள் இருந்தன. இதன் நடுவில் வாயு உள் நுழையும் வழி அமைக்கப் பட்டிருந்தது. இப் பகுதியிதிருந்து வாயு உருளையின் முனைகளை நோக்கி இருபுற மும் செல்லுமாறு சுருள் வில் வடிவில் பள்ளங்கள் அமைக்கப் பட்டிருந்தன. வாயு உள்நுழையுமிடத்தில் பள்ளத்தின் ஆழம் சற்று அதிகமாகவும், வர வரக் குறைந்துக் கொண்டே வந்து முனை களினருகில் சற்றுக் குறைவாகவும் உள்ளவாறு அமைக்கப்பட்டி ருந்தது. இத்தகைய அமைப்பினால், இணைப்புப் பள்ளங்களின் தேவை நீக்கப்பட்டது.

தகுந்த துணைப் பம்பின் உதவியுடன் செயல்படும்போது இந்தப் பம்பு 10^{-6} மில்லி மீட்டர் பாதரச உயர அளவுக்கு அழுத்தத்தைக் குறைப்பதற்குப் பயன்படும்.

127. விரவல் பம்புகள் (Diffusion pumps)

முதல் முதலில் காடே (Gaede) என்பவர் விரவல் பம்பு (diffusion pump) மூலம் அழுத்தத்தை வெகுவாகக் குறைக்க முடியுமெனக் காட்டினார். பின்னர் பரமேசுவரன் என்பவர் அமைத்த "வாரன்" பம்பு (Waran's pump) கலத்தின் காற்றழுத்தத்தை 10^{-10} மீட்டர் பாதரச உயரம் வரை குறைக்க வல்லது. ஆனால், இந்த விரவல் பம்பு நன் முறையில் செயல்பட, முதலில் கலத்தின் காற்றழுத்தம் 10^{-4} மீட்டர் பாதரச உயரத்துக்குக் குறைக்கப்பட வேண்டும். முதலில் கலத்தின் காற்றழுத்தத்தைக் குறைக்கப் பயன்படுத்தப்படும் பம்புகளை உதவிப் பம்புகள் (backing pumps) என்போம். இவ் வகையில் சுழற்சிப் பம்புகள் (rotary pumps) மிகவும் பயன்படுகின்றன. இவ்வாறு சுழற்சிப் பம்புடன் விரவல் பம்பு வேலை செய்யும்போது, கலத்தின் அழுத்தத்தை ஒரு சில நிமிடங்களில் 10^{-10} மீட்டர் பாதரச உயரத்துக்குக் குறைக்க இயலும்.

முதலில் விரவல் பம்புகளில் பாதரசம் பயன் படுத்தப் பட்டது. திரவக் காற்றினைப் பயன்படுத்திக் குளிர வைப்பதன் மூலம், பாதரச ஆவி முதலியவற்றை மீண்டும் திரவமாக மாற்றிவிடலாம். எனவே, காற்றழுத்தத்தைப் பாதரச ஆவி யழுத்தத்தை விடக் குறைக்க இயலும். பாதரச ஆவியை மட்டும் தூய காய்ச்சி வடித்த பொட்டாசியத்தைக் கொண்டும் நீக்கி விட இயலும். சில சமயம் சோடியத்தையும் பயன் படுத்துவதுண்டு.

உயர் வெற்றிடத்தைத் தோற்றுவிக்க உறிஞ்சிகளையும் (absorbents), வாயு நீக்கிகளையும் (getters) பயன்படுத்தலாம். ஆனால், முதலிலேயே தகுந்த அளவுக்குக் காற்று வெளியேற்றப் பட்டிருக்க வேண்டும்.

தேங்காய் ஓட்டின் கரித்தூள் காற்றை உட் கவரக் கூடிய மிகச் சிறந்த உறிஞ்சியாகும். இதனை வெற்றிடமாக்கப்படும் கலத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள பக்கக் குழாயில் வைத்துச் சூடேற்றுகிறோம். உதவிப் பம்பு நிறுத்தப்பட்டவுடன் இது திரவக் காற்றினால் (liquid air) குளிர வைக்கப் பட்டால், எஞ்சியிருக்கும் காற்றினை உட்கவர்ந்துகொள்ளும். இறுதியில் பக்கக் குழாயின் இணைப்பை உருக்கி அடைத்து விடுகிறோம்.

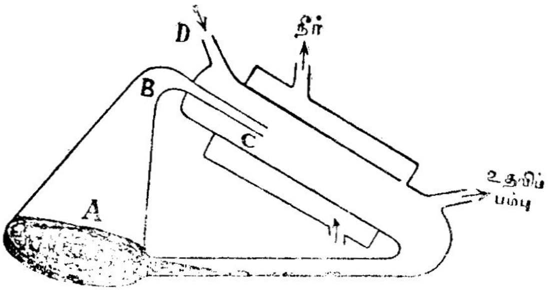
பாஸ்பரஸ், மக்னீசியம் போன்ற உலோகங்களை வாயு நீக்கிகளாகப் பயன்படுத்தலாம். உறிஞ்சிகளைப் போலவே இவைகளையும் பக்கக் குழாயில் வைத்துச் சூடேற்றினால், இவை ஆவி,

அல்லது வாயுக்களுடன் இணைந்து அவைகளை நீக்க உதவுகின்றன. மேலும், இவை கலந்தின் சுவர்களில் மறைந்துள்ள வாயுக்களையும் (occluded gases) நீக்கிவிடுகின்றன.

"வாரன்" பம்பு (Waran's pump)

விரவல் பம்புகளில் மிகவும் எளிமையானதும், திறன் மிக்கதுமானது, H. பரமேசுவரன் என்பவர் அமைத்த "வாரன்" பம்பு (H. P. Waran's pump) ஆகும்.

A என்ற கூம்பு வடிவக் கலம் BC என்ற C-யில் கூரிய முனையுடைய வளைந்த குழாயுடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. BC-யைச் சுற்றி ஒரு நீளமான குழாய் B-யின் அருகில் உருக்கி இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த நீளக் குழாயின் மற்றொரு முனை உதவிப் பம்புடனும்



படம் 135

கீழ்ப்புறம் A என்ற கலத்துடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இதே நீண்ட குழாய் B யின் அருகில் D என்ற குழாய் மூலம் காற்று வெளியேற்றப்பட வேண்டிய கலத்துடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. நீண்ட குழாயைச் சுற்றிக் குளிர்ந்த நீர் சுற்றி வருமாறு அமைக்கப் பட்டுள்ளது.

A என்ற கலத்தில் பாதரசம் கொதிக்க வைக்கப்பட்டு ஆவியாக்கப்படுகிறது. இந்த ஆவி C-யை விட்டு வேகமாக வெளியேறும் போது கலத்திலுள்ள காற்று இதனுள் விரவுதலால், நீண்ட குழாயின் வழியே இழுத்துச் செல்லப்படுகிறது. சுற்றி வரும் குளிர் நீர், நீண்ட குழாயுள் செல்லும் பாதரச ஆவியைத் திரவமாக மாற்றி விடுதலால், பாதரசம் மீண்டும் A-யை வந்தடைகிறது. ஆனால், அடுத்துச் செல்லப்படும் காற்று உதவிப்பம்பினால் உறிஞ்சப்படுகிறது. இதனைச் சில சமயம் திரவமாக்கும் பம்பு (Condensation pump) எனவும் கூறுவதுண்டு.

இப்போதுள்ள பம்புகளில் பாதரசத்துக்குப் பதில், அதைவிடக் குறைந்த ஆவி அழுத்தம் (10^{-8} மீட்டர் பாதரச உயரம்) கொண்ட அப்பீசான் எண்ணெய் (apeizon oil) பயன்படுத்தப் படுகிறது.

இம் முறையில் கலத்தின் அழுத்தத்தை 10^{-10} மீட்டர் பாதரச உயரத்துக்குச் சென்கோ (Cenco) உயர் வெற்றிடப் பம்பின் உதவியைக் கொண்டு குறைக்க இயலும்.

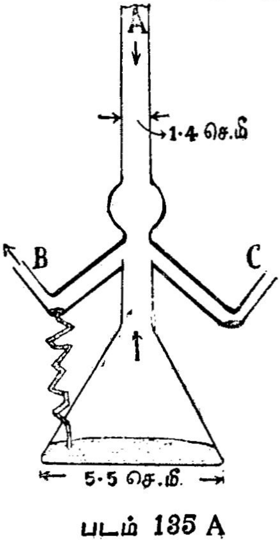
எண்ணெய் விரவல் பம்புகள் (Oil diffusion pumps)

பாதரசத்துக்குப் பதிலாக அதைவிடக் குறைந்த ஆவி அழுத்தங்கள் கொண்ட எண்ணெய்களைப் பயன் படுத்தி விரவல் பம்புகள் அமைக்கப்பட்டன. ஆவி திரவமாக மாறுவது குறைந்த அழுத்தத்தில் நிகழுமாதலால், திரவமாக மாற்றி மீண்டும் ஆவியாக்கும் நிகழ்ச்சி குறைக்கப்படுகிறது. ஆதலால், பம்பு இயங்கும் வேகம் அதிகரிக்கும். எனினும், பம்பு தொடர்ந்து நீண்ட நேரம் வேலை செய்யும் போது தோன்றும் எண்ணெய்த் துளிகளைத் தவிர்ப்பதற்காகத் தேவைப்பட்டால், திரவமாக்கி ஆவியாக்கும் அமைப்பு பயன் படுத்தப் படுகிறது.

எண்ணெய் மூலக் கூறின் நிறை பாதரச மூலக்கூறின் நிறையை விட அதிகமாக இருப்பதோடு, அதன் பருமனும் பல மடங்கு அதிகமாக உள்ளது. ஆதலால், எண்ணெய்ப் பம்புகள் மிகுந்த வேகத்துடன் இயங்குகின்றன. எனினும், எண்ணெய்கள் வாயுக்களையும், ஆவிகளையும் கரைக்கும் தன்மையுடையவையாதலால், இப் பம்புகளை அடிக்கடி தூய்மைப் படுத்த வேண்டும்.

ஹிக்மன் பம்பு (Hickman Pump):

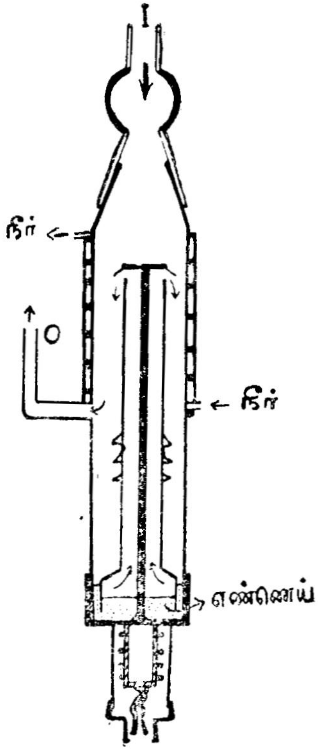
இதில் அதிகமான மூலக்கூறு நிறையுள்ள எண்ணெய் பயன் படுத்தப்படுகிறது. இதன் அமைப்பு படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது A என்ற முனை வெற்றிடமாக்கப்பட வேண்டிய கலத்துடனும், B ஒரு துணைப் பம்புடனும் இணைக்கப்படுகின்றன.



படம் 135 A

C என்ற அழுத்தத்தை அளக்கும் கருவியுடன் இணைத்து அழுத்தத்தின் மதிப்பை அறிய இயலும். A-யைச் சுற்றியுள்ள செப்புக் கம்பிகள் மூலம் வெப்ப நிலையைத் தகுந்த அளவு குறைத்துக் கொள்ள இயலும் இது முற்றிலும் கண்ணடியால் அமைக்கப்பட்ட பம்பாகும். 0.1 மில்லி மீட்டர் பாதரச அழுத்தத்தைத் தோற்றுவிக்கும் துணைப்பம்பின் உதவியுடன், இத்தகைய பம்பு 10^{-6} மில்லிமீட்டர் பாதரச உயர அளவுக்கு அழுத்தத்தைக் குறைக்க இயலும்.

விக்கர்ஸ் பம்பு (Vickers Pump):



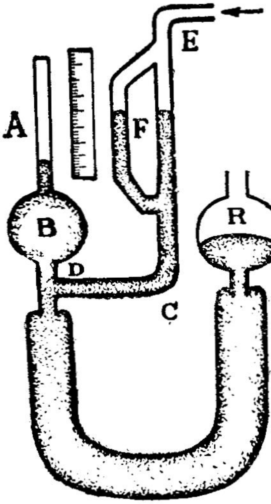
படம் 135 B

இது முற்றிலும் உலோக அமைப்பைக் கொண்டது. இதில் அப்பிஸான்—B என்ற எண்ணெய் பயன் படுத்தப்படுகிறது. இதன் வெளிப்புறப் பகுதிகளனைத்தும் எஃகினால் ஆனவை. உட்புறப் பகுதிகள் செம்பினால் ஆக்கப்பட்டிருக்கின்றன. இதில் எண்ணெய் மின்சாரத்தால் சூடாக்கப் படுகின்றது. இதில் எண்ணெயின் வெப்ப நிலையைத் தக்கவாறு வைத்திருக்க வேண்டும். எண்ணெயின் ஆவி அழுத்தம் ஒரு மில்லி மீட்டர் பாதரச உயரத்தை விட அதிகமாகாதவாறு அதன் வெப்ப நிலை பாதுகாக்கப்பட வேண்டும். அவ்வாறில்லாவிட்டால் உயர் வெப்ப நிலைகளில், அதிக ஆவி அழுத்தமும், மிகுந்த பாகுத்தன்மையும் கொண்ட ஒரு எண்ணெய் தோன்றி, பம்பு திறமையாகச் செயல் படுவதைத் தடை செய்யும்.

128. மக்லியாடு அளவி (Mcleod gauge):

U -குழாய் அழுத்தமானியால் அளவிட இயலாத குறைந்த அழுத்தங்களை மக்லியாடு அளவியின் மூலம் அளவிடலாம்.

B என்ற குமிழின் மேற்புறம் சீரான ஒரு குறுகிய நுண் குழாய் A இணைக்கப்பட்டுள்ளது. B -யின் அடிப்புறம் உள்ள குழாயிலிருந்து பிரிந்து செல்லும் CE என்ற குழாய் அழுத்தம் அளவிடப்பட வேண்டிய கலத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. A என்ற குழாயின் விட்டமும் CE -யின் கிளைக் குழாய் F -ன் விட்டமும் சமம். கிளைக் குழாய் மேலும் கீழும் CE -யுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. F -க்கும் A -க்குமிடையில் ஒரு அளவு கோல் உள்ளது. B -யின் அடிப்புறம் உள்ள CD என்ற குழாய் R என்ற தேக்கியுடன் (Reservoir) ஒரு ரப்பர் குழாயின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. நுண்குழாயின் கொள்ளளவும் B என்ற குமிழின் கொள்ளளவும் முன்னரே அளவிடப்படுகின்றன.



படம் 136

காற்றழுத்தத்தை அளவிடும் போது, R-ஐக் கீழிறக்கி B என்ற குமிழுடன், காற்றழுத்தம் அளவிடப்பட வேண்டிய கலம் தொடர்பு கொள்ளுமாறு செய்யப்படுகிறது. இப்போது B-யின் காற்றழுத்தமும், கலத்தின் காற்றழுத்தமும் சமமாக இருக்கும். இந்த அழுத்தத்தை p என்போம். இப்போது R-என்ற தேக்கியை மேலுயர்த்தும் போது C க்கு மேல் அடைபட்ட காற்று பாதரசத்தால் அழுத்தப்படும். R-ஐ நன்கு உயர்த்தி அடைபட்ட காற்று A என்ற நுண் குழாயினுள் மட்டும் உள்ளவாறு செய்கிறோம். F என்ற குழாயில் A-யில் உள்ள குழாயில் உள்ளதை விடப் பாதரசம் h உயரம் அதிகமாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். நுண்புழை விளைவை (Capillary effect) நீக்குவதற்காகத்தான் A, F என்ற இரு குழாய்களின் விட்டங்களும் சமமாக உள்ளவாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

இப்போது A யில் அடைபட்ட காற்றின் அழுத்தம் $= (p + h)$; அடைபட்ட காற்றின் பருமன் v என்போம். (இது நுண் குழாய் A-யின் பருமனுக்குச் சமம்.) C-க்கு மேல் குமிழின் பருமன் V ஆனால், p என்ற அழுத்தத்தில் அடைபட்ட வாயுவின் பருமன் $=$ $(V + v)$ ஆகும்.

எனவே, பாயில் விதிப்படி (Boyle's law),

$$p\,(V + v) = v\,(p + h)$$

எனவே, $$pV = v\,h \qquad (128.1)$$

அல்லது, $$p = \frac{v}{V} h \qquad (128.2)$$

அழுத்தத்தைப் பின்வரும் மற்றொரு முறையிலும் அளக்கலாம். F என்ற குழாயின் மேல்முனைக்கு நேராக F-ல் பாதரச மட்டம் வரும் வரை R-ஐ உயர்த்துகிறோம். S என்பது A-யின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பானால், அடைபட்ட காற்றின் பருமன் $= h\,s\,l$ என்பது A-யின் நீளமானால் அதன் முழுப் பருமன் $= hs$. எனவே,

$$p\,(V + l\,s) = (p + h)\,h\,s$$

எனவே, $$p = \frac{h^2 s}{[V + (l - h)\,s]} \qquad (128.3)$$

V-யுடன் ஒப்பிடுகையில் $(l - h)\,s$ மிகச் சிறியதாகையால் இதனை,

$$p = \frac{h^2 s}{V} \qquad (128.4)$$

என எழுதலாம். எனவே, $p \propto h^2$ (128.5)

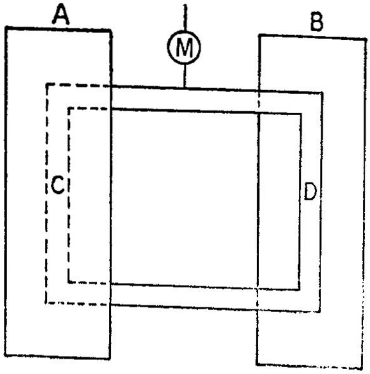
இம் முறையில் தோராயமாக p-யின் மதிப்பை அறிய இயலும்.

129. நட்சன் அளவி (Kundsen gauge)

இது வாயுக்களின் மூலக் கூறுகளின் இயக்க ஆற்றல் வெப்ப நிலை உயரும் போது அதிகமாகிறது என்ற பண்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட ஒரு கருவியாகும்.

இதில் A, B என்ற பிளாட்டினத்தாலான நிலையான தகடுகளும், மேலும் கீழும் இணைக்கப்பட்ட C, D என்ற இரு அசையக் கூடிய (movable) தகடுகளும் உள்ளன. அசையும் தகடுகள் ஒரு குவார்ட்ஸ் இழையால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. குவார்ட்ஸ் இழையில் பொருத்தப்பட்ட ஒரு ஆடி, ஒரு அளவு கோல் ஆகியவற்றைக் கொண்டு, அசையும் தகடுகளின் விலகலை அளந்தறிய இயலும். A, B என்ற தகடுகளை மின்சாரத்தால் சூடேற்ற இயலும்.

அழுத்தம் அளவிடப் பட வேண்டிய வாயுவைக் கருவியினுள் செலுத்துகிறோம். இப்போது நிலைத் தகடுகள் சூடேற்றப்படுகின்றன. நிலைத் தகடுகளில் ஒன்று C-யின் முன்புறமிருந்தால், மற்றது D-யின் பின்புறமிருக்கும். வாயுவின் அழுத்தம் குறைவாக உள்ள போது சராசரி மோதலிடைத் தூரம் (Mean free path) மூலக்கூறுகளுக்கு மிக அதிகமாக இருக்கும். நிலையான தகடுகளினருகில் வரும் மூலக்கூறுகளின் இயக்க ஆற்றல் உயர்கிறது. (திசைவேகம் உயர்வதால்). எனவே, நிலைத் தகடுகளின் பக்கத்திலிருந்து வரும் மூலக்கூறுகளின் திசைவேகம் அதிகமாகவும், மறு புறம் வரும் மூலக்



படம் 137

கூறுகளின் திசைவேகம் குறை வாகவும் உள்ளதால் C, D என்ற தகடுகள் நிலைத் தகடுகளை விட்டு விலகிச் செல்கின்றன. வாயுவின் அழுத்தம் இந்த விலக்கத்திற்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும். நிலைத்தகடுகளின் வெப்ப நிலை $T_1°$ A எனவும், C, D ஆகிய தகடுகளின் வெப்ப நிலை $T_2°$A எனவும், விலக்கம் θ எனவும் கொண்டால், அழுத்தம்,

$$p = \frac{2k}{\sqrt{\frac{T_1}{T_2} - 1}} \cdot \theta \qquad (129.1)$$

என நட்சன் நிறுவியுள்ளார். இதில் k -என்பது தகடுகளின் பரப்பளவுகள், தொங்கும் தகடுகளின் நிலைமத் திருப்புத்திறன், அலைவு நேரம் ஆகியவற்றைப் பொறுத்த ஓர் மாறிலியாகும்.

10^{-5} மீட்டர் பாதரச உயரத்தை விடக் குறைவான அழுத்தங்களை இக் கருவியின் துணை கொண்டு எளிதில் அளக்கலாம். ஆயினும் அழுத்தம் மிகக் குறைவாக உள்ளபோது மூலக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை மிக மிகக் குறைவாக இருத்தலால், விலக்கம் புலப்படாத அளவு சிறியதாக இருக்கலாம். மேலும் சிறு நில நடுக்கம் கூட ஓரளவு விலகலைத் தோற்றுவிக்கும்.

130. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்கக் கணக்கு (1): திட்ட வெப்ப, அழுத்த நிலையில் காற்றின் அடர்த்தி 1.29 கி. கிராம் க. மீட்டர் எனக் கொண்டு, 25°C வெப்ப நிலையில், பாதரசப் பாரமானியின் உயரங்கள் முறையே 76 செ.மீ. 70 செ.மீ. உள்ள இரு இடங்களின் உயர வேறுபாட்டைக் கணக்கிடு-

0°C வெப்ப நிலையில் காற்றின் அடர்த்தி 1.29 கி. கிராம்/கன மீட்டராதலால் 25.C வெப்ப நிலையில் அடர்த்தி

$$\rho = \frac{1.29 \times 273}{(274 + 25)}$$

$$= 1,18 \text{ கிலோகிராம்/கன மீட்டர்.}$$

எனவே, $$\frac{p}{\rho} = \frac{1.013\times 10^5}{1.18}$$

$$= k \quad (\text{என்க}).$$

சமன்பாடு (121.6) லிருந்து, x என்பது உயர வேறுபாடானால்,

$$\log_e = \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{g}{k}x,$$

ஆதலால்,

$$2.3026 \log_{10}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{x\times 9.8}{1.013\times 10^5}\times 1.18$$

$p_1 = 76$ செ.மீ; $p_2 = 70$ செ.மீ. ஆதலால்,

$$x = \frac{1.013\times 10^5\times 2.3026\log_{10}\left(\frac{76}{70}\right)}{9.8\times 1.18}$$

$$= 737 \text{ மீட்டர்}$$

எனவே, இரு இடங்களுக்கிடையே உயர வேறுபாடு = 737 மீட்டர் ஆகும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள்: (1) பாரமானியொன்று காட்டும் அளவு 800 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு இடத்தில் 76 செ.மீ. யிலிருந்து 69 செ மீ. ஆகக் குறைகிறது. பாரமானி காட்டும் அளவு 62 செ.மீ. ஆக உள்ள இடத்தின் உயரம் என்ன?

(2) ஓரியல் வளிமண்டல உயரம் 8 கிலோ மீட்டர் என இருந்தால், கடல் மட்டத்தில் பாரமானி காட்டும் அழுத்தம் 76 செ.மீ. எனவும், ஒரு இடத்தில் 65 செ.மீ. எனவும் இருந்தால், அந்த இடத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

(3) இரு இடங்களில் வளி அழுத்தங்கள் முறையே 63.5 செ.மீ, 75 செ.மீ. உயரங்களாகவும் இருந்தால், அவ்விரு இடங்களின் உயர வேறுபாட்டைத் தேவையான அளவுகளை அட்டவணை (Tables) -யிலிருந்து பெற்றுக் கணக்கிடுக.

(4) திட்ட வெப்ப நிலை அழுத்த நிலையில் காற்றின் அடர்த்தி 1.29 கிலோகிராம் / கன மீட்டர் என இருந்தால், வளி அழுத்தங்கள் முறையே 76 செ.மீ., 76 செ மீ., உயரங்கள் உள்ளவாறு உள்ள இரு இடங்களின் உயர வேறுபாட்டைக் கணக்கிடுக. வெப்ப நிலை 15° C எனவும், பாதரசத்தின் அடர்த்தி 13.6 கிராம்/கன செ.மீ எனவும் கொள்க.

(5) பாரமானியின் உயரங்கள் முறையே 75 செ மீ , 68 செ மீ, உள்ள இரு இடங்களின் செங்குத்து உயர வேறுபாடு 700 மீட்டரானால், 60 செ.மீ. பாரமானி உயரமுள்ள ஒரு இடத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

பிரிவு V

பாய்பொருள் இயக்கவியல்

(Hydrodynamics)

131. பாய்பொருள் இயக்கம் (Motion of fluids)

பாய்பொருளின் இயக்கப் பண்புகளை அதன் ஒவ்வொரு துகளின் இயக்கத்தையும் ஆய்வதன் மூலம் அறிய இயலும். இம் முறையில் ஒரு துகளின் (x, y, z) என்ற ஆயங்களைக் குறித்து அவற்றை t-ன் காலத்தின் சார்புகளாகக் (function) கூறுவோம். காலம் t_0 - ஆக இருந்தபோது (x_0, y_0, z_0) என்பன அத் துகளின் ஆயங்களாக இருந்திருந்தால், காலம் t-ஆக உள்ளபோது ஆயங்கள் (x, y, z) ஆகியவை ஒவ்வொன்றையும் (x_0, y_0, z_0, t_0, t) என்பனவற்றின் சார்பாகக் கொண்டு பாய்பொருளின் இயக்கத்தையறியலாம். இவ்வாறு துகள் இயக்கவியலில் (particle dynamics) கண்டறிந்தது போலவே பாய் பொருளின் இயக்கத்தை அறிந்துக் கொள்வது நேரடியான முறையெனினும், சற்றுக் கடினமான முறையாகும். இம் முறையை முதன் முதலில் **லெக்ராஞ்சே (Lagrange)** என்பவர் பின்பற்றினர்.

எனினும், பல சமயங்களில் ஆய்லர் (Euler) என்பவர் பின்பற்றிய முறை மிகவும் எளிமையானதாகவும், பயனுள்ளதாகவும் இருக்கக் காண்கிறோம். பாய்பொளின் இயக்கத்தை விளக்க, ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில், ஒரு குறிப்பிட்ட கணம் t-யில் அதன் அடர்த்தி $\rho = \rho(x, y, z, t)$ -யையும் அதன் திசைவேகம் $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ -யையும் அறிந்திருந்தால், போதுமானது. எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில், (x, y, z) என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட துகளின் இயக்கத்தைக் காண்பதில்லை. பாய்பொருளின் நிலையைக் குறிக்கப் பயன்படும் எந்த அளவும் (காட்டாக, அழுத்தம்) குறிப்பிட்ட புள்ளியில், குறிப்பிட்ட கணத்தில், ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புடன் இருக்கும். ஆனல், இம்முறையிலும் சிறிய கால இடைவெளி δt -யில் துகள்களின் இயக்கங்களை நாம் பின்பற்ற வேண்டியவர்களாகிறோம்.

முதலில் பாய்பொருள் இயக்கத்தின் சில பொதுத் தன்மைகளைக் காண்போம். பாய்பொருள் இயக்கம் சீரானதாகவோ, அல்லது சீரற்றதாகவோ, (steady or non-steady) இருக்கலாம். குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் பாய்பொருளின் திசைவேகம் $\vec{v}$ காலத்தைப் பொறுத்து மாறுபடாதிருந்தால், இயக்கம் சீரானதாகும். அதாவது, சீரான இயக்கத்தில், ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியின் வழியே செல்லும்போது, செல்கின்ற துகள்களின் திசைவேகங்கள் (அப் புள்ளியில்) சமமானவை. வேறொரு புள்ளியில் திசைவேகம் மாறுபட்டாலும், அந்த இரண்டாவது புள்ளியின் வழியே செல்லும் போது துகள்களின் திசை வேகங்கள் சமமானவைகளாக இருக்க வேண்டும். பாய்பொருள் ஓட்டம் குறைந்த வேகத்தில் நிகழும் போது இந் நிபந்தனை பெரும்பாலும் பொருந்தக் காணலாம். சீரற்ற ஓட்டத்தில் திசைவேகம் $\vec{v}$, காலம் t -யின் சார்பாக (function) இருக்கும். கொந்தளிப்பு இயக்கத்தில் (turbulent motion) திசைவேகம் புள்ளிக்குப் புள்ளி, கணத்துக்குக் கணம் வெகுவாக மாறுதலடையும்.

இரண்டாவதாகப் பாய்பொருள் இயக்கம் சுழற்சியுடையதாகவோ, அல்லது சுழற்சியற்றதாகவோ (rotational or irrotational) இருக்கலாம். எந்த ஒரு புள்ளியிலும், அதைப் பொறுத்துப் பாய்பொருளின் மீச்சிறு பகுதியொன்று கோணத் திசை வேகமில்லாமலிருந்தால், இயக்கம் சுழற்சியற்றதாகும். எடை குறைந்த ஒரு காற்றுடி இறகுகள் போன்ற துடுப்பு அமைப்புக் கொண்ட ஒரு சிறு சக்கரத்தைத் திரவத்துள் வைக்கும்போது, அது சுழலாமல் அப்படியே நகர்ந்தால், இயக்கம் சுழற்சியற்றதெனவும், சுழன்றுக் கொண்டு நகர்ந்தால், இயக்கம் சுழற்சியுடையதெனவும் கூறலாம். (மிதக்கக் கூடிய சிறு கூடையினை ஓடும் நீரில் விட்டோமானால், சில சமயம் கூடை சுழற்சியின்றியும், சில சமயம் சுழன்றுக் கொண்டும் நகர்ந்து செல்லக் காணலாம்.)

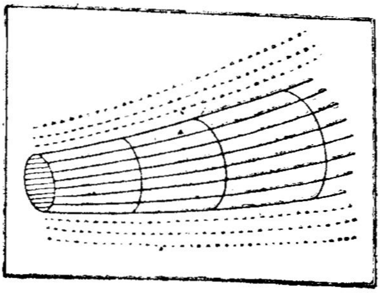
மூன்றாவதாகப், பாய்பொருளியக்கம் இறுகு தன்மையுடையதாகவோ, அல்லது இறுகாத் தன்மை யுடைய தாகவோ (Compressible or incompressible) இருக்கலாம். பொதுவாக, திரவங்களனைத்தும் இறுகாத் தன்மையுடன் இயங்குவன. சில நேரங்களில் பெரும இறுகுத் தன்மையுடைய வாயுக்கள் கூட அடர்த்தி வேறுபடாமல் இயங்குகின்றன. அப்போது அவை இறுகாத்தன்மையுள்ள இயக்கத்திலிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். பறந்து செல்கையில், வேகம் ஒலியின் வேகத்தைவிடக் குறைவாக உள்ளபோது, இறகுகளைப் பொறுத்த காற்றின் இயக்கம் ஏறத்தாழ இறுகாத் தன்மையுடையதே. இப்போது அடர்த்தி ρ மாறிலியாகும். (x, y, z, t) ஆகியவற்றைப் பொறுத்து மாறுவதில்லை.

இறுதியாகப் பாய்பொருளியக்கம் பாகுத் தன்மையுடனே அல்லது பாகுத் தன்மையின்றியோ (viscous or non-viscous) இருக்கலாம். பாகுத் தன்மை யுள்ளபோது, அதனுல் திரவங்களின் வெவ்வேறு படிவங்களிடையே அல்லது அடுக்குகளிடையே (layers) தொடு கோட்டு விசைகளைத் (tangential forces) தோற்றுவிப்பதன் மூலம் ஆற்றல் இழப்பு (loss of energy) நிகழும்.

132. வரிச் சீரியக்கம் (Stream line flow):

சீரான இயக்கத்தில் (steady flow) எந்தப் புள்ளியிலும் திசை வேகம் காலத்தைப் பொறுத்து மாறுபடாது. திரவத்தினுள் (அல்லது பாய்பொருளினுள்) P என்ற புள்ளியில் திசைவேகம் $\vec{v}$ ஆனுல், அப் புள்ளியின் வழியே செல்லும்போது எல்லாத் துகள் களும் அதே $\vec{v}$ என்ற திசை வேகத்தைக் கொண்டிருக்கும். ($\vec{v}$ -யின் எண் மதிப்பு, திசை இரண்டும் சமமாக வேண்டும்.) P-யில் இருந்த துகள் Q, R போன்ற புள்ளிகளின் வழியே சென்றுல், Q, R என்ற புள்ளிகளுக்கும் மேற் கூறிய நிபந்தனை பொருந்தும். எனவே, P -யைக் கடக்கும் எந்தத் துகளும் Q, R என்ற புள்ளிகளின் வழியே செல்லும். எனவே, P, Q, R முதலிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு, P -யை வந்தடையும் எந்த ஒரு துகளும் செல்லுகின்ற பாதையைக் குறிக்கும் இதனைச் சீரோட்ட வரி (stream line) என்கிறோம். சீரோட்ட வரி ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் துகள்களின் திசைவேகத்துக்கு இணையாக இருக்கும். இரு சீரோட்ட வரிகள் ஒன்றை யொன்று வெட்டிக் கொள்ளா. ஏனெனில் அவ்வாறு வெட்டிக் கொண்டால், வெட்டும் புள்ளியில் வந்தடையும் ஒரு துகள் இரு திசை வேகங்களில் ஏதேனுமொன்றுடன் இயங்க இயலு மாதலால், ஓட்டம் சீரானதாகாது.

பாய்பொருளின் ஒவ்வொரு புள்ளியின் வழியேயும் ஒரு சீரோட்ட வரி வரைய இயலும். படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஒரு



படம் 138

குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை யுள்ள சீரோட்ட வரிகளை ஒரு கற்றை யாகக் கருதுவோமாயின், அதனை ஒரு ஓட்டக் குழாய் (tube of flow) எனலாம். ஓட்டக் குழாயின் பக்கவாட்டில் எந்தச் சீரோட்ட வரியும் உட்செல்லவோ, வெளி வரவோ இயலாது. ஏனெனில், ஓட்டக் குழாயின் ஓரங்கள் முழுமையும் சீரோட்ட வரிகளால் சூழப் பட்டுள்ளன. ஒரு புறம் நுழையும் பாய் பொருள், குழாயின் மறு புறம் தான் வெளிவர இயலுமே யொழியப் பக்கவாட்டில் வெளிவர இயலாது. சீரான இயக்கத்தில் சீரோட்ட வரிகளின் அமைப்பு காலத்தைப் பொறுத்து மாறாது.

நாம் பொதுவாகச் சீரான, சுழற்சியற்ற, இறுகாத் தன்மை யுள்ள, பாகுத் தன்மையற்ற பாய்பொருளின் இயக்கத்தைப் பற்றியே காண்போம்.

133. தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு (Equation of continuity)

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் பாய்பொருளின் அழுத்தம் P ஆனல், காலத்தைப் பொறுத்து அழுத்த மாறுபாட்டை $\frac{\partial P}{\partial t}$ எனக் குறிக்கலாம். இது x, y, z, t ஆகியவற்றின் சார்பாக அமையும். திரவத்துடன் செல்லும் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தம் மாறுபடுவதை $\frac{dP}{dt}$ குறிக்கும். பாய் பொருளின் திசைவேகம்

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (133.1)$$

என இருந்தால்,

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \qquad (133.2)$$

என எழுதலாம்.

[ஏனெனில், $dP = P(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - P(x,y,z,t)$

$$= \frac{\partial P}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot dz + \frac{\partial P}{\partial t}\cdot dt$$

எனவே, $\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$

எனவே, $$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)P \qquad (133.3)$$

என எழுதலாம். இச் சமன்பாடு அழுத்தம் P -க்கு மட்டுமன்றி (x, y, z, t) ஆகியவற்றைப் பொறுத்த எந்த அளவுக்கும் பொருந்துமாதலால், பொதுவாக,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \qquad (133.4)$$

எனக் குறியீட்டு முறையில் எழுதலாம்.

இப்போது பாய்பொருளில் δV என்ற சிறு பகுதியைக் காண்போம். இது எப்போதும் பாய் பொருளுடன் செல்லும் ஒரு பகுதியைக் குறிக்கிறதென்போம். அவ்வாருனல், எப்போதும் அதனுள் குறிப்பிட்ட துகள்களே உள்ளன. பொதுவாக δV காலத்தைப் பொறுத்து மாறுபடும். δV என்பது δx, δy, δz என்ற பக்கங்களுள்ள கன செவ்வக வடிவத்திலிருந்தால்,

$$\delta V = \delta x \, \delta y \, \delta z \qquad (133.5)$$

இந்தக் கன செவ்வகத்தின் x - திசையில் δx தொலைவில் தோன்றும் திசை வேக மாறுபாடு $\frac{d}{dt}(\delta x)$ ஆகும். இது $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x\right)$-க்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். $\left[v_x = \frac{dx}{dt}\right]$.

எனவே, $$\frac{d}{dt}(\delta_x) = \frac{\partial v_x}{\partial x}\delta x \qquad (133.6)$$

அதேபோல்,

$$\frac{d}{dt}(\delta_y) = \frac{\partial v_y}{\partial y}\delta y \qquad (133.7)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta_z) = \frac{\partial v_z}{\partial z}\delta z \qquad (133.8)$$

எனவே, சமன்பாடு (133.5) -லிருந்து

$$\frac{d}{dt}(\delta v) = \delta y \, \delta z \frac{d}{dt}(\delta x) + \delta z \, . \, \delta x \frac{d}{dt}(\delta y) + \delta x \, . \, \delta y \frac{d}{dt}(\delta z)$$

$$= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta x \, \delta y \, \delta z$$

ஆதலால், $$\frac{d}{dt}\delta v = (\nabla \cdot \vec{v})\,\delta v \qquad (133.9)$$

[பாய்பொருள் இறுகுத் தன்மையற்றதாக (incompressible) இருந்தால்,

$$\frac{d}{dt}\,\delta v = 0 \qquad (133.10)$$

எனவே, $(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$ என ஆகவேண்டும்.] (133.11)

இப்போது δv - என்ற சிறு பகுதியின் நிறை δm எனக் கொண்டால்,

$$\delta m = \rho\,\delta V \qquad (133.12)$$

அடர்த்தியும், பருமனும் மாறுபட்டாலும் நிறை மாறுவதில்லை. எனவே,

$$\frac{d}{dt}(\delta m) = \frac{d}{dt}(\rho\,\delta V) = 0$$

$$\therefore \qquad \frac{d\rho}{dt}\,\delta V + \rho\,\frac{d}{dt}(\delta V) = 0$$

எனவே, சமன்பாடு (133 9) -லிருந்து

$$\frac{d\rho}{dt}(\delta V) + \rho\,(\nabla \cdot \vec{v})\,\delta V = 0$$

அல்லது

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \qquad (133.13)$$

இதில் $\left(\frac{d}{dt}\right)$ -க்குப் பதிலாகச் சமன்பாடு (133.4) -லிருந்து பிரதியிட்டால்,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\,\rho + \rho\,(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$

அதாவது,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\,\vec{v}) = 0 \qquad (133.14)$$

இதுவே தொடர்ச்சிச் சமன்பாடாகும். (equatinn of continuity).

இதில் $\vec{v} = v_x\,i$ என்று மட்டும் இருந்தால், ($v_y = 0;\ v_z = 0$ ஆக இருந்தால்),

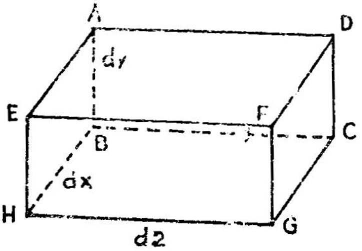
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\,v_x) = 0 \qquad (133.15)$$

என எழுதலாம்.

134. ஆய்லர் சமன்பாடு (Euler's equation)

இப்பகுதியில் பாகுத் தன்மையற்ற (non-viscous) ஒரு பாய் பொருளுக்கான இயக்கச் சமன்பாட்டினைக் காண்போம். இத்தகைய பொருட்களில் தகைவு (stress) அழுத்தத்தால் மட்டுமே உண்டாவதாகும். அவ்வாறு அழுத்தத்துடன் திரவத்தின் ஓரலகுப் பருமனின் மீது செயல்படும் வெளிப்புற விசை $\vec{f}$ என்போம். எனவே, δv என்ற பருமதின் மீது செயல்படும் விசை $\vec{f}\,\delta V$ ஆகும்.

$\delta V = \delta x\, \delta y\, \delta z$ என்ற மீச்சிறு பகுதியைக் காண்போம். அதன் இடது பக்கம் செயல்படும் விசை (p என்பது இடது பக்கத்தில்



படம் 139

அழுத்தமானல்) $= p\,\delta y\,\delta z$. வலது பக்கத்தில் அழுத்தம் $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\right)$ ஆக இருக்குமாதலால், வலது பக்கத்தில் செயல் படும் விசை $= \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z$.

எனவே, x-திசையில் δV-யின் இரு முகங்களுக்கிடையே யுள்ள விசை வேறுபாடு

$$\delta F_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\,\delta x\right)\delta y\,\delta z \tag{134.1}$$

இதேபோன்று y, z திசைகளில்

$$\delta F_y = \left(-\frac{\partial p}{\partial y}\,\delta y\right)\delta z\,\delta x \tag{134.2}$$

$$\delta F_z = \left(-\frac{\partial p}{\partial z}\,\delta z\right)\delta x\,\delta y \tag{134.3}$$

எனவே, δv -யின் மீது செயல்படும் விசை

$$\delta\vec{F} = \left(-\vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} - \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta v$$

அதாவது, $$\delta\vec{F} = -\nabla p\,\delta v \qquad (134.4)$$

எனவே, ஓரலகுப் பருமனின் மீது செயல்படும் விசை (அழுத்தத்தால்)

$= -\nabla p$ ஆகும்.

$\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ ஆதலால், δV -யின் இயக்கச் சமன்பாட்டினைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்: ρ என்பது δV -யின் அடர்த்தியானால்,

$$\rho\,\delta V\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}\,\delta V - \nabla p\,\delta V$$

எனவே, $$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p$$

அல்லது, $$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\vec{f}}{\rho} \qquad (134.5)$$

சமன்பாடு (133.4) - ஐப் பயன்படுத்தி இதனை

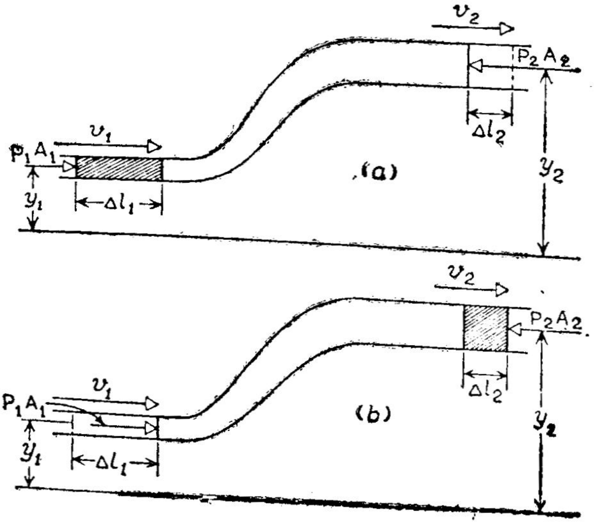
$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\,.\,\nabla\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\vec{f}}{\rho} \qquad (134.6)$$

என எழுதலாம். இதில் $\vec{f}$ என்பது அலகுப் பருமனின் மீது செயல்படும் வெளிவிசை யாதலால், $\dfrac{\vec{f}}{\rho}$ ஓரலகு நிறையின் மீது செயல்படும் வெளி விசையைக் குறிக்கும். இதுவே இயக்கத்திலுள்ள பாய்பொருளின் இயக்கச் சமன்பாடு. இதனை ஆய்லர் இயக்கச் சமன்பாடு (Euler's equation of motion) என்கிறோம்.

135. பெர்னேலி தேற்றம் (Bernoulli's theorem)

அழுத்தம், திசைவேகம், திரவ, வாயுப் பொருட்களின் ஓட்டத்தில் இரு புள்ளிகளிடையே யுள்ள உயர வேறுபாடு ஆகியவற்றின் தொடர்பினைக் கொடுக்கும் அடிப்படைச் சமன்பாடு பெர்னேலி தேற்றம் அல்லது பெர்னேலி சமன்பாடு (Bernoulli's equation) எனப்படும்.

படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள குழாய் இடது பக்கத்தில் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு A_1 என்ற சீரான மதிப்புடனும், இடையில் மாறு



படம் 140

படும் குறுக்குப் பரப்புடனும் வலதுபுறம் A_2 என்ற சீரான குறுக்குப் பரப்புடனும் உள்ளதாகக் கொள்வோம். இதனுள் செல்லும் பாய் பொருளின் இயக்கத்தைக் காண்போம்.

பாய்பொருளில் கோடிட்டுக் காட்டிய பகுதியை மட்டும் கருத்தில் கொள்வோம். (a) என்ற நிலையிலிருந்து பாய்பொருள் (b) என்ற நிலையினை அடைந்தால், அவ் வியக்கத்தின் தன்மைகளைக் காண்போம்.

குழாயின் குறுகிய பகுதியில் (இடதுபுறம்) எல்லாப் புள்ளிகளினும் அழுத்தத்தின் மதிப்பு p_1 எனவும், திசைவேகம் v_1 எனவும், குறுகிய பகுதியில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அழுத்தம் p_2 எனவும், திசைவேகம் v_2 எனவும் கொள்வோம். A_1 என்ற

பரப்பின் மீது செயல்படும் விசை $= p_1 A_1$. இதனால், திரவம் அதன் (விசையின்) திசையில் $\triangle l_1$ தொலைவு நகர்வதாகக் கொண்டால், இதன் காரணமாகப் பாய்பொருள் சிறு பகுதியின் மீது புரியப்படும் பணி $= p_1 A_1 \triangle l_1$ ஆகும். அதே சமயத்தில் வலப் புறம் A_2 என்ற பரப்பின் மீது செயல்படும் விசை $= p_2 A_2$. இப் பரப்பு நகரும் தொலைவு $\triangle l_2$ எனக் கொண்டால், பாய்பொருள் புரியும் பணி $= p_2 A_2 \triangle l_2$ ஆகும்.

எனவே, (a) என்ற நிலையிலிருந்து (b) என்ற நிலையை அடையப் பாய் பொருளின் மீது புரியப் படவேண்டிய பணி $= (p_1 A_1 \triangle l_1 - p_2 A_2 \triangle l_2)$ ஆகும். நாம் எடுத்துக் கொண்ட பொருள் இறுகாத் தன்மை (incompressibie) யுடையதாக இருந்தால், $A_1 \triangle l_1$, $A_2 \triangle l_2$ என்பன சம பருமன்களைக் குறிக்க வேண்டும். அப் பருமனிலுள்ள பாய் பொருளின் நிறை m ஆனால்

$$A_1 \triangle l_1 = A_2 \triangle l_2 = \frac{m}{\rho} \qquad (135.1)$$

ஆகும். இதில் ρ என்பது அடர்த்தி.

எனவே, பாய்பொருளின் மீது செய்யத் தேவையான பணி

$$W = (p_1 - p_2) \frac{m}{\rho} \qquad (135.2)$$

(a) என்ற நிலையிலிருந்து (b) என்ற நிலையை அடையும்போது இடையில் உள்ள திரவப் பகுதியின் இயக்க ஆற்றலில் எந்த மாற்றமும் உண்டாவதில்லை. எனவே, மொத்த இயக்க ஆற்றல் மாறுபாடு

$$E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad (135.3)$$

படத்தில் காட்டியது போலன்றி ஒரே கிடைத் தளத்திலுள்ள குழாயாக இருந்தால், நிலையாற்றல் (potential energy) மாறுவதில்லை. ஆனால், A_1, A_2 என்ற பகுதிகள் முறையே y_1, y_2 என்ற வெவ்வேறு உயரங்களிலிருந்தால், (ஏதேனுமொரு கிடைத் தளத்திலிருந்து) நிலையாற்றல் (புவியீர்ப்பு நிலையாற்றல்) நிகழும் மாறுபாடு

$$E_p = mgy_2 - mgy_1 \qquad (135.4)$$

பொதுவாகக் குழாயில் பாய்பொருள் செல்லும்போது உராய்வுத் தடை விசை தோன்றும். குழாய் உராய்வு மிகக் குறைந்ததாகவும், அகன்றதாகவும், நீளம் குறைந்ததாகவும், பாய் பொருள் பாகுத்தன்மை மிகக் குறைந்ததாகவும், அதன் வேகம் குறைவானதாகவும் இருந்தால், இந்தத் தடைவிசை புறக் கணிக்கத் தக்கதாக இருக்கும். இந் நிலையில பாய்பொருளின்

மீது புரியப்படும் பணி அதன் மொத்த ஆற்றல் உயர்வுக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே, சமன்பாடுகள் (135.2) (135.3), (135.4) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$(p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} = \tfrac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) + mg(y_2 - y_1)$$

அல்லது,

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + y_2 \qquad (135.5)$$

இச் சமன்பாட்டில் அடியில் உள்ள 1, 2 என்ற எண்கள் பாய் பொருளில் ஏதேனும் இரு புள்ளிகளைக் குறித்தலால், பொதுவாக எந்தப் புள்ளியிலும்

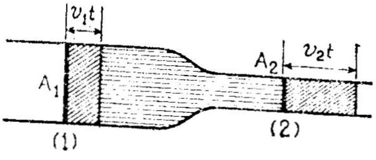
$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + y = \text{மாறிலி} \qquad (135.6)$$

என எழுதலாம். இதுவே, தடையேதுமில்லாத பாய் பொருளின் வரிச் சீரியக்கத்திற்கான பெர்னோலி சமன்பாடாகும்.

இதில் p என்பது நியூட்டன் / ச. மீட்டர் என்ற அலகிலும், ρ என்பது கிலோ கிராம் / கன மீட்டர் என்ற அலகிலும் இருக்க வேண்டும். இச் சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் நீளத்தின் பரிமாணத்தைக் (dimension) கொண்டிருக்கக் காணலாம். முதல் உறுப்பு அழுத்தத்தாலும், இரண்டாவது திசை வேகத்தாலும், மூன்றுவது உயரத்தாலும் தோன்றக் கூடியவைகளாகும்.

136. தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு விளக்கம் (equation of continuity - explanation):

படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு அமைப்புக் கொண்ட ஒரு, குழாயில் பாய்பொருள் செல்வதாகக் கொள்வோம்.



படம் 41

(1) என்ற இடத்தில் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு A_1 எனவும், (2) என்ற இடத்தில் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு A_2 எனவும் திசை வேகங்கள் முறையே v_1, v_2 எனவும் கொள்வோம். t - என்ற காலத்தில் A_1 -ன் வழியே செல்லும் பாய் பொருளின் பருமன்

$A_1 v_1 t$; அதே காலத்தில் A_2-வின் வழியே செல்லும் பாய் பொருளின் பருமன் $A_2 v_2 t$. பாய் பொருள் இறுகாத் தன்மை யுடைய தெனில் (incompressible) இரு பரப்புக்களின் வழியே செல்லும் பாய்பொருளின் பரும வீதங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad (136.1)$$

அல்லது,

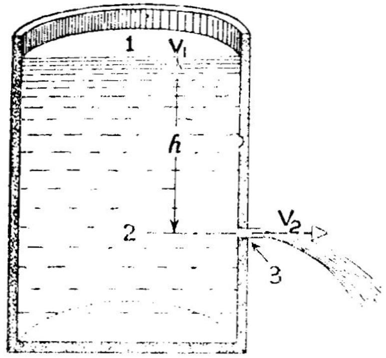
$$Av = \text{மாறிலி} \qquad (136.2)$$

இதிலிருந்து அறிவ தென்ன வென்றால், இறுகாத் தன்மை கொண்ட பாய்பொருளில் குறுக்குப் பரப்பு குறைந்தால், திசை வேகம் அதிகமாக வேண்டும்; குறுக்குப் பரப்பு அதிகமானல் திசை வேகம் குறைய வேண்டும். இதனைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு விளக்கும்: திரைக் காட்சியரங்கு முதலியவற்றிலிருந்து கூட்டமாக வெளி வரும்போது நுழை வாயில் மிகக் குறுகியதாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். கூட்டத்தினுள் உள்ளபோது நெருக்கம் (அழுத்தம்) அதிகமாக இருப்பதோடு நாம் நகரும் வேகம் குறைவாக இருக்கும். ஆனல் நுழை வாயிலை அடையும்போது நெருக்கம் சற்றுக் குறைய நாம் வாயிலின் வழியே வெளிவரும் வேகம் அதிகமாக இருக்கும். இதனையே பாய்பொருக்கு மேற்கண்ட சமன்பாடு உணர்த்துகிறது.

இச் சமன்பாட்டையும் தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு எனக் கூறுவ துண்டு.

137. டாரிசெல்லி தேற்றம் (Toricelli's theorem)

படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு தொட்டியில், திரவ மட்டத்திலிருந்து h ஆழத்தில் உள்ள ஒரு துளையின் வழியாக திரவம் வெளிச் செல்வதாகக் கொள்வோம். துளையில் (3) என்ற புள்ளியையும், திரவ மட்டத்தில் (1) என்ற புள்ளியையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 142

இரு புள்ளிகளும் வெளிப் புறத்துடன் தொடர்பு கொண்டுள்ள தால் அவற்றின் அழுத்தம் வளி மண்டல அழுத்தம் (atmospheric pressure) p -க்குச் சமமாக இருக்கும். துளை மிகச் சிறியதாக இருந் தால் v_1 [(1) என்ற புள்ளியின் வேகம்] சிறியதாக இருக்கும். ஏனெ னில் திரவ மட்டம் சிறிது சிறிதாகத்தான் கீழிறங்கும். தொட்டியின் அடிப்புறத்திலிருந்து (1), (2) என்ற புள்ளிகள் முறையே y_1, y_2 என்ற உயரங்களில் உள்ளதாகக் கொள்வோம்.

பெர்னேலி சமன்பாட்டின் படி,

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + y^2$$

துளை மிகச் சிறியதாகவும் தொட்டி அகன்றதாகவும் இருந்தால் $v_1 \simeq 0$ ஆகும். எனவே,

$$v_2^2 = 2g(y_1 - y_2)$$

$$= 2g\,h$$

அல்லது, $$v_2 = \sqrt{2g\,h} \qquad (137.1)$$

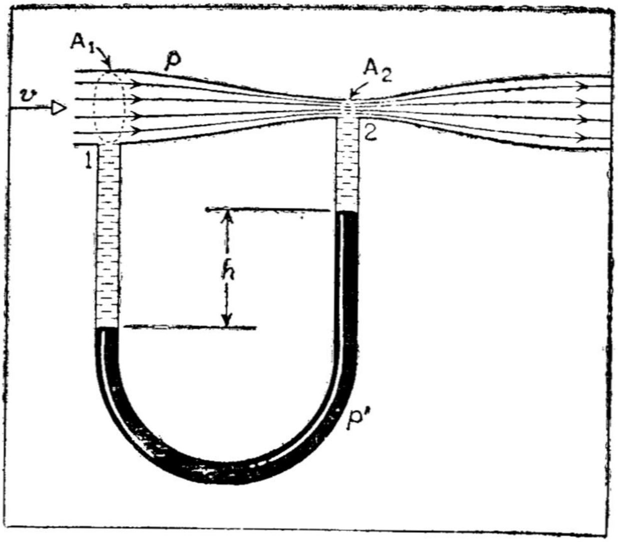
இதுவே டாரி செல்லி சமன்பாடு (Toricelli's equation) ஆகும். இந்த வேகம் தடையின்றிப் புவியீர்ப்பால் தானே h உயரம் விழும் பொருளின் வேகத்திற்குச் சமமாயிருக்கக் காணலாம்.

துளையின் குறுக்குப் பரப்பு A எனின் வெளிவரும் திரவத்தின் நேர வீதம் (rate of flow) $= Av = A\sqrt{2g\,h}$ ஆகும்.

துளையை நோக்கி வரும் போது வரிச்சீர்க் கோடுகள் (Stream lines) ஒன்றை யொன்று நெருங்குவதால் வெளி வந்த பின்னரும் சிறிது தொலைவு வரை மேலும் நெருங்கி வந்து பின்னர் விரிவடை கின்றன. மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் குறுக்குப்பரப்பாக மிகக் குறு கிய இடத்தில் உள்ள பரப்பையே எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

138. வெஞ்சுரி மீட்டர் (Venturi meter)

வெஞ்சுரி மீட்டரில் உள்ள சீரான குழாயொன்றின் நடுவில் படத்தில் உள்ளது போல், ஒரு குறுகிய பகுதி யொன்றுள்ளது, இந்தக் குறுகிய பகுதியில் அழுத்தமானியின் ஒரு புயம் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. திரவம் செல்லும் போது வரிச்சீரியக்கம் கெட்டு விடாதவாறு குறுகிய பகுதியின் இரு புறமும் நன்கு சரிவாக அமைக் கப்பட்டிருக்கும். குழாயின் அகன்ற பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளிக் கும், குறுகற் பகுதியிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் பெர்னேலி சமன் பாட்டை எழுதுவோம். p_1, p_2 என்பன முறையே இரு புள்ளிகளின்



படம் 143

அழுத்தங்களேயும், v_1, v_2 என்பன முறையே திசைவேகங்களேயும் குறிப்பிட்டால்,

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (138.1)$$

(குழாய் கிடை மட்டத்திலுள்ளதால் $y_2 - y_1 = 0$ ஆகும்.) அகன்ற பகுதியிலுள்ளதை விடக் குறுகற் பகுதியில் வேகம் அதிக மானதாக இருக்க வேண்டுமாதலால், p_2, p_1 ஐ விடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும். இந்த அழுத்த வேறுபாட்டை அழுத்தமானி யின் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம். மேலும் சமன்பாடு (136.1) லிருந்து

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{ஆதலால்,}$$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} \qquad (138.2)$$

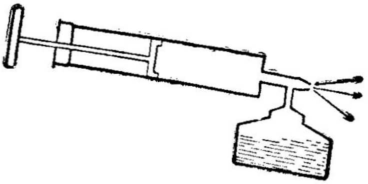
எனவே, சமன்பாடு (138.1) -ல்

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1 v_1}{A_2}\right)^2$$

அல்லது, $$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \qquad (138.3)$$

இதிலிருந்து குழாயின் அகன்ற பகுதியில் திரவத்தின் வேகத்தைக் கணக்கிட முடியும்.

இவ்வகையில் குறுகற் பகுதியில் தோன்றும் அழுத்தக் குறைவு பல வழிகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. உள் எரி எஞ்சினில் (internal Combustion engine) இவ்வாறு குறுகலான பகுதியில் உண்டாகும். அழுத்தக் குறைவு எரி வாயுவை உள்ளிழுக்கப் பயன்படுத்தப்

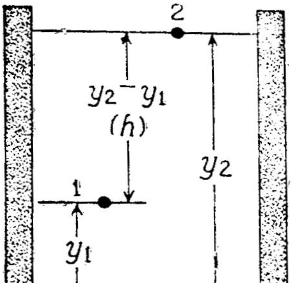


படம் 144

படுகிறது. நீராவி எஞ்சினில் நீர்த் தொட்டியிலிருந்து நீரை மேலிழுக்கவும் இதே தத்துவம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. வீட்டில் மருந்து தெளிக்க உதவும் சிறு கருவிகளும் இதே தத்துவத்தில் வேலை செய்கின்றன.

139. பெர்னேலி சமன்பாட்டின் விளை பயன்கள் (Applications of Bernoulli's equation)

(i) பாய் பொருள் நிலையியல் சமன்பாடு : பெர்னேலி சமன்பாட்டில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் v -யின் மதிப்பைச் சுழியாகக் கொண்டால், பாய் பொருள் இயக்கமின்றி நிலையாக இருக்கும். நிலையாக



படம் 145

உள்ள திரவத்தில் (1), (2) என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அவை முறையே y_1, y_2 என்ற உயரங்களில் உள்ளன என்

போம். அவ்விரு புள்ளிகளின் அழுத்தங்கள் முறையே P_1, P_2 என்றால் $v_1 = v_2 = 0$ ஆதலால், பெர்னோலி சமன்பாட்டின் படி,

$$\frac{p_1}{\rho g} + y_1 = \frac{p_2}{\rho g} + y_2$$

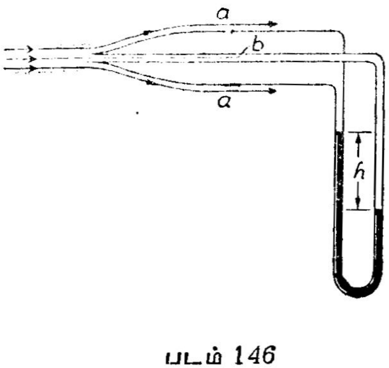
$$\therefore \quad p_1 = p_2 + (y_2 - y_1)\rho g$$

$(y_2 - y_1) = h$ என்றால்,

$$(p_1 - p_2) = h\rho g \qquad (139.1)$$

இச் சமன்பாட்டில் (2) என்ற புள்ளி திரவ மட்டத்திலிருந்தால், h என்ற ஆழத்தில் உள்ள புள்ளியில் உள்ள அழுத்தம், திரவமட்டத்தில் உள்ளதை விட ($h\rho g$) என்ற அளவு அதிகமாக இருக்கும்.

(ii) பிட்டோ குழாய் (Pitot tube) : குழாய் ஒன்றின் வழியே செல்லும் வாயுவின் வேகத்தை அளந்தறிய பிட்டோ குழாய் பயன்படுகிறது. a என்ற இடத்தில் உள்ள திறப்பு (opening) வாயு செல்லும் திசைக்கு இணையாகவும், b என்ற இடத்திலுள்ள திறப்பு வாயு செல்லும் திசைக்கு நேர்குத்தாகவும் உள்ளன. ஆதலால் a என்ற புள்ளி



படம் 146

யில் வாயுவின் அழுத்தம், குழாயில் வாயுவின் அழுத்தத்துக்குச் சமமாக இருக்கும். இதனை P_a என்போம். b என்ற புள்ளியில் வாயு சற்று நேரத்தில் நிலையாக நின்று விடுதலால், வேகம் சுழியாகும். குழாயில் வாயுவின் வேகம் v எனவும் b என்ற புள்ளியில் அழுத்தம் P_b எனவும் கொண்டால் பெர்னோலி தேற்றப்படி

$$P_b = P_a + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (139.2)$$

அழுத்தமானியில் உள்ள திரவத்தின் அடர்த்தி ρ_0 ஆனால்,

$$P_b = P_a + h\,\rho_0 g$$

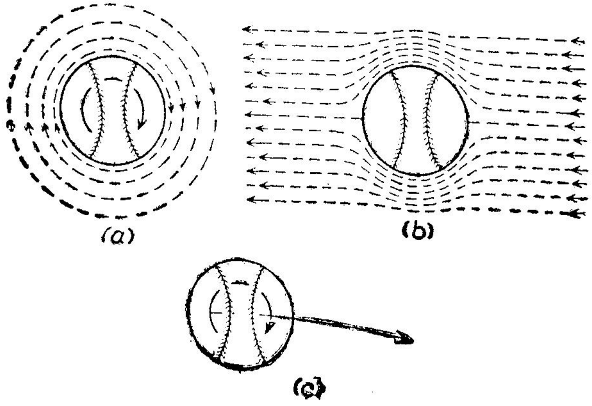
எனவே, சமன்பாடு (139.2) -லிருந்து

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho_0 g\,h$$

அல்லது, $$v = \sqrt{\frac{2\,\rho_0\,g\,h}{\rho}} \qquad (139.3)$$

எனவே, குழாயில் வாயுவின் வேகத்தைக் கண்டறியலாம்.

(iii) சுழலும் பந்தின் இயக்கம் (**Motion of a spining ball**): காற்றில் செங்குத்தான அச் சொன்றைப் பொறுத்துச் சுழன்று கொண்டு தரைக்கு இணையாகச் செல்லும் ஒரு பந்தின் இயக்கத்தைக் காண்போம். உராய்வின் காரணமாக, பந்தினைச் சுற்றிலுமுள்ள காற்றுப் பகுதி சற்றுப் பந்தின் திசையிலேயே சுழல முயற்சிக்கும். நிலையாக உள்ள காற்றினூடே பந்து செல்வதும், எதிர்த் திசையில் அதே வேகத்துடன் செல்லும் காற்றில் பந்து நிலையாகச் சுழன்று கொண்டிருப்பதும் ஒரே விதமான விளைவுகளைத் தோற்றுவிப்பனவாகும். பந்து தனது அச்சைப் பொறுத்துச் சுழன்று கொண்டே காற்றில் செல்கின்றதாதலால் அதனால் தோன்றும் விளைவு இரு திசைவேகங்களின் (சுழற்சி, இடப் பெயர்ச்சி ஆகியவற்றின்) தொகு பயனால் தோன்றுவதாகும்.



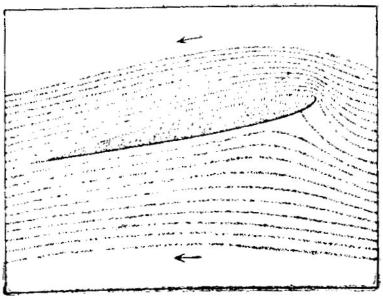
(a) (b) (c)

படம் 147

படம் (a), மேலிருந்து நோக்கும் போது பந்தின் சுழற்சியையும், அதனுடன் ஒட்டிய காற்றுப் பகுதியின் சுழற்சியையும் காட்டுகிற...

படம் (*b*) நிலையாக உள்ள பந்தைச் சுற்றி எதிர்த் திசையில் காற்று வீசும் போது காற்றின் வரிச்சீர்க் கோடுகளைக் (Streamlines) காட்டுகிறது. இரு விளைவுகளையும் ஒன்றாகக் கருதுவோமாயின், பந்துக்கு மேலே (படத்தில் மேலுள்ள பகுதி மேலிருந்து பார்க்கையில் பக்கவாட்டில் இருக்கும்) காற்றுப்பகுதியின் வேகம் குறைவாகவும், கீழேயுள்ள காற்றுப் பகுதியின் வேகம் கூடுதலாகவும் இருத்தல் தெளிவு. எனவே, மேலே அழுத்த உயர்வும், கீழே அழுத்தக் குறைவும், ஏற்படுத்தப்படுவதால் பந்து படம் (*c*) -யில் உள்ளவாறு கீழ் நோக்கி வளைந்து செல்லும்.

(iv) விமான இறகின் மீது மேலுந்து விசை (Lift on an airplane wing) : காற்றினூடே செல்லும் விமான இறகின் தோற்றம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. விமான இறகுகளின் மேற்பகுதி கீழுள்ளதை விட வளைந்தும், வளைவு ஆரம் குறைவாகவும் உள்ளதால் சரிவு அதிகமாக உள்ளது. இதன் காரணமாக, இறகினைச் சூழ்ந்துள்ள காற்றின் வரிச்சீர்க் கோடுகள் படத்திலுள்ளவாறு



படம் 148

அமைகின்றன. இதிலிருந்து மேற் பகுதியில் காற்றின் வேகம் அதிகமாகவும், கீழ்ப் பகுதியில் குறைவாகவும் இருக்க வேண்டுமென்பது தெளிவாகிறது. பெர்னேலி விதிப்படி, இதனால் மேற்புறம் அழுத்தக் குறைவும், அடிப்புறம் அழுத்த உயர்வும் ஏற்படுதலால், மேல் நோக்கிய உந்து விசையை இறகு உணர்கிறது. இறகின் திசைக்கும் விமானம் செல்லும் திசைக்கு மிடையிலுள்ள கோணம் மேலும் அதிகரித்தால் இயக்கம் வரிச்சீரமைவுடனிருக்காது. பெர்னேலி சமன்பாடும் பொருந்தாது. அந்த நிலையில் மேற்புற அழுத்தம் குறைவதற்குப் பதில் உயர்வடைதலால் விமானம் நின்று விடலாம்.

(v) ராக்கெட்டின் உந்து விசை (Thrust on a rocket):

p என்ற அழுத்தமும், ρ என்ற அடர்த்தியுமுள்ள வாயு அழுத்தி வைக்கப்பட்டுள்ள ராக்கெட்டின் பகுதியைக் காண்போம். அப்பகுதியின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு A என்போம். A_0 என்ற சிறு பரப்புள்ள திறப்பு அடியிலுள்ளதென்போம். இதன் வழியாக வரும் வாயுவின் வேகம் v_0 என்போம்.

பெர்னோலி சமன்பாட்டின்படி

$$p_1 - p_2 = \rho g (y_2 - y_1) + \tfrac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

இதில், வாயுவின் அடர்த்தி மிகக் குறைவானதாதலால், y_1, y_2 என்ற உயரங்களால் தோன்றும் அழுத்த மாற்றம் மிகக் குறைவாக இருக்கும். எனவே, அதனைப் புறக்கணித்து, p_1 என்பது அறையினுள் வாயுவின் அழுத்தம் p -யையும், P_2 என்பது திறப்பின் அருகில் வளி அழுத்தம் p_0 -வையும், v என்பது இவ் வறைக்குள் காற்று வரும் வேகத்தையும் குறிப்பதாகக் கொண்டால்,

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2) \qquad (139.4)$$

எனவே,

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2 \qquad (139.5)$$

இது வெளிவரும் வாயுவின் திசைவேகம் v_0 -வைக் கொடுக்கும் சமன்பாடாகும்.

[ஓட்டம் (flow) வரிச் சீரியக்கமாக இல்லாவிடினும், வெளிவரும் வேகம் மிக அதிகமாக இல்லாதபோது வாயு இறுகுத் தன்மையற்றதாகவும், இயக்கம் வரிச்சீரமைவு கொண்டதாகவும் கொள்ளலாம்]

இப்போது தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$Av = A_0 v_0 \qquad (139.6)$$

[ராக்கெட்டில் வெளியேறும் வாயுவின் நிறைக்குச் சமமான நிறையுள்ள வாயு எரிபொருளிலிருந்து பெறப்படும்.]

திறப்பு மிகச் சிறியதானால், $A_0 << A$ ஆதலால், $v_0 >> v$ ஆகும். எனவே, v_0^2 - உடன் ஒப்பிடுகையில் v^2 புறக்கணிக்கத் தக்கதாகும்.

எனவே,

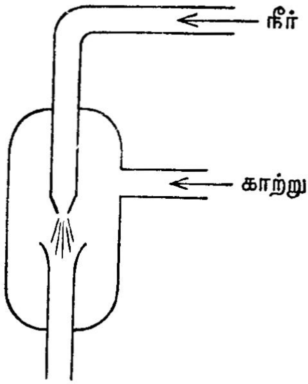
$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}} \qquad (139.7)$$

இவ்வாறு திசைவேகம் மிக அதிகமாக உள்ள வாயு வெளி வருதலால், உந்த அழிவின்மை விதிப்படி ராக்கெட் மேலெழும்புகிறது.

(iv) வடி பம்பு (Filter pump):

ஒரு கலத்திலுள்ள காற்றழுத்தத்தைக் குறைக்க உதவும் ஒரு எளிய கருவி இது.

J என்ற குழாயில் நீர் ஜெட் போன்று அதிக வேகத்தில் செலுத்தப் படுகிறது. இதன் காரணமாகக் குறுகிய பகுதிக்கருகில் அழுத்தக் குறைவு உண்டாகிறது.



படம் 149

காற்று நீக்கப்பட வேண்டிய கலத்திலிருந்து A என்ற பக்கக் குழாயின் வழியாகக் காற்று இழுக்கப்பட்டு நீருடன் சேர்த்து வெளியேற்றப்படுகிறது.

இத்தகைய பம்பின் உதவியால் கலத்தின் காற்றழுத்தத்தை 1.5 செ.மீ. முதல் 2 செ.மீ. நீர் உயரம் வரை எளிதில் குறைக்க இயலும். அந்த அழுத்த நிலையில் நீரின் தெவிட்டு ஆவி அழுத்தம் கலத்தின் காற்றழுத்தத்துக்குச் சமமாகி விடுதலால், மேலும் அழுத்தம் குறைவதில்லை.

140. பயிற்சிகள் (Exercises)

விளக்கக் கணக்கு (1):

தொட்டி யொன்றின் திரவ மட்டத்திலுள்ள புள்ளி கீழிறங்கும் வேகம் v ஆனால், அதன் சுவரில் h ஆழத்திலுள்ள துளை யொன்றின் வழியே வெளி யேறும் திரவத்தின் வேகம்

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,gh}{1 - \frac{v}{v_0}}}$$

எனக் காட்டு. அதிலிருந்து, தொட்டியின் பரப்பு A, துளையின் பரப்பு A_o -வை விட மிகப் பெரியதாக உள்ளபோது,

$$v_o \simeq \sqrt{2gh}\left(1+\frac{A_o^2}{2A^2}\right)$$

எனக்காட்டு.

பெர்னேலி சமன்பாட்டிலிருந்து திரவ மட்டத்திலும், துளையருகிலும் அழுத்தம் வளியமுத்தத்துக்குச் சமமாக உள்ளபோது,

$$\frac{v^2}{2g} + h = \frac{v_o^2}{2g}$$

அல்லது, $(v_o^2 - v^2) = 2gh$

எனவே, $v_o^2\left[1-\frac{v^2}{v_o^2}\right] = 2gh$

$$\therefore \qquad v_o = \sqrt{\frac{2gh}{1-\frac{v^2}{v_o^2}}} \qquad (140.1)$$

தொடர்ச்சிச் சமன்பாட்டின்படி

$$Av = A_o v_o$$

ஆதலால், $\frac{v}{v_o} = \frac{A_o}{A}$

எனவே, சமன்பாடு (140.1) -லிருந்து

$$v_o = \sqrt{2gh}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{v_o^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2gh}\left(\frac{1}{1-\frac{A_o^2}{A^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

எனவே, $\left(\frac{A_o}{A}\right)^2$ சிறியதாக உள்ளபோது

$$v_o = \sqrt{2gh}\left(1-\frac{A_o^2}{A^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq \sqrt{2gh}\left(1+\frac{A_o^2}{2A^2}\right)$$

இதுவே தேவையான சமன்பாடு.

விளக்கக் கணக்கு (2):

ஒரு அகன்ற, செங்குத்துச் சுவர்கள் கொண்ட தொட்டியொன்றில் H உயரத்துக்கு நீர் நிற்கிறது. நீர் மட்டத்திலிருந்து h ஆழத்தில் சுவரில் ஒரு சிறு துளையிடப்பட்டுள்ளது. தொட்டியின் அடிப் பக்கத்திலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் அத் துளையிலிருந்து வரும் நீர் விழும்? வேறொரு ஆழத்தில் ஒரு சிறு துளையிட்டு அதே இடத்தில் நீர் விழ வேண்டுமானால், இரண்டாவது துளை எவ்வளவு ஆழத்தில் இருக்க வேண்டும்?

துளையினருகிலும், தொட்டியின் மேற் பரப்பிலும் அழுத்தங்கள் சமமானவை. (வளியமுத்தம்) தொட்டி அகன்ற தாகையால், தொட்டியின் நீரின் மேற் பரப்பில் உள்ள ஒரு புள்ளியின் வேகம் $v' = 0$ ஆகும். எனவே, வெளிவரும் நீரின் வேகம் v என்ருல், பெர்னேலி சமன்பாட்டின்படி,

$$H = \frac{v^2}{2g} + (H - h)$$

அல்லது, $$v^2 = 2gh \qquad (140.2)$$

துளையிலிருந்து வெளி வருகையில் வேகம் v கிடை மட்டத்திற்கிணையாக உள்ளது. இதற்குச் செங்குத்துத் திசைவேகக் கூறு சுழியாகும். அடிப் பக்கத்துக்கிணையான கிடைத் தளத்தையடைய நீர் செங்குத்துத் திசையில் $(H - h)$ உயரம் கீழே வர வேண்டும். முடுக்கம் = g ஆதலால், கீழே வர எடுத்துக் கொண்ட காலம் t ஆனல்,

$$(H - h) = \tfrac{1}{2} gt^2$$

எனவே, $$t = \sqrt{\frac{2(H - h)}{g}} \qquad (140.3)$$

இந்தக் கால அளவில் கிடைத்தளத் திசைவேகக் கூறு மாறுவதில்லை யாதலால், கிடைத்தளத்துக்கிணையாகச் சென்ற தொலைவு

$$x = vt$$

$$= \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2(H - h)}{g}}$$

எனவே, $$x = 2\sqrt{h(H - h)} \qquad (140.4)$$

இதுவே தொட்டியின் அடிப் பக்கத்திற்கும் நீர் விழுமிடத்திற்குமிடையே யுள்ள தொலைவாகும்.

இப்போது நீர் மட்டத்திலிருந்து h_1 என்ற ஆழத்தில் மற்றொரு துளையிட்டு அதிலிருந்து வரும் நீர் அதே x தொலைவில் விழ வேண்டுமானால்,

$$x = 2\sqrt{h_1 (H - h_1)} \qquad (140.4)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (140.3), (140.4) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$h_1 (H - h_1) = h (H - h)$$

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$H = (h + h_1)$$

என்பது தெளிவு. எனவே,

$$h_1 = H - h \qquad (140.5)$$

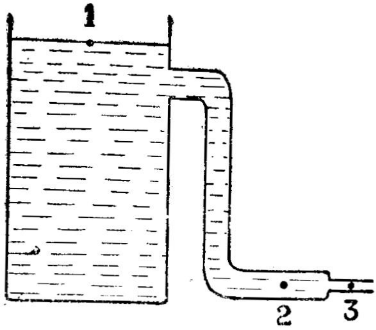
என்ற ஆழத்தில் உள்ள துளையிலிருந்து வெளிவரும் நீரும் அதே இடத்தில் விழும்.

பயிற்சிக் கணக்குகள் : (1) ஒரு பெரிய தொட்டியில் நீர்மட்டத்திலிருந்து 10 மீட்டர் ஆழத்தில் 1 செ.மீ. விட்டமுள்ள துளையொன்று இருந்தால் அதிலிருந்து வெளிவரும் நீரின் வேகம் என்ன? ஒரு செகண்டில் வெளியேறும் நீரின் பருமன் என்ன?

(2) மூடிய தொட்டியொன்றின் நீர் மட்டத்தில் அழுத்தப்பட்ட காற்றால் 2000 கிலோகிராம்/ச. மீட்டர் அழுத்தம் உண்டாக்கப்பட்டுள்ளது. நீர் மட்டத்திலிருந்து 5 மீட்டர் ஆழத்திலுள்ள ஒரு சிறு துளையின் வழியே வெளிவரும் நீரின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

(3) கிடை மட்டத்தில் உள்ள 40 ச.செ.மீ. குறுக்குப் பரப்புள்ள குழாய் வரிச் சீரோட்டம் கெடாதவாறு 10 ச.செ.மீ குறுக்குப் பரப்புள்ள மற்றொரு குழாயுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பெரிய குழாயின் வழியே நீர் 1 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் சென்றால், சிறிய குழாயில் அழுத்தம் என்ன? (பெரிய குழாயில் நீரின் அழுத்தம் 8000 கிலோகிராம்/ச. மீட்டர் எனக் கொள்க).

(4) ஒரு தொட்டியிலிருந்து படத்தில் உள்ளவாறு குழாய் வழியே நீர் வெளி வருகிறது. (1) என்ற புள்ளி 10 மீட்டர் உயரத்திலும், (2), (3) என்ற புள்ளிகள் 1 மீட்டர் உயரத்திலும், (2) என்ற புள்ளியில் குழாயின் குறுக்குப் பரப்பு 400 ச.செ.மீ. ஆகவும், (3) என்ற புள்ளியில் குறுக்குப் பரப்பு 200 ச.செ.மீ. ஆகவும் இருந்தால், (2) என்ற புள்ளியில் அழுத்தத்தையும், நீர் வெளிவரும் அளவையும் கணக்கிடுக.



படம் 150

(5) 2 செ.மீ. உள் விட்டமுள்ள ஒரு ரப்பர் குழாயிலிருந்து வரும் நீர் நேரடியாக, 2 மி.மீ விட்டமுள்ள 25 துளைகள் கொண்ட பூவாளி (Sprinkler) யொன்றின் முனையுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. குழாயில் நீரின் வேகம் 1 மீட்டர்/செகண்டு என்றால் பூவாளியிலிருந்து நீர் என்ன வேகத்தில் வெளிவரும்?

(6) ஒரு வெஞ்சுரி குழாயில் $A_1 = 5\ A_2$ எனக் கொள்வோம். A_1 -ல் அழுத்தம் 2 வளியழுத்தமானால் (2 atmospheres) p_2 சுழியாகுமாறு v_1, v_2 என்பனவற்றின் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடுக. (திரவம் நீரெனக் கொள்க)

(7) ஒரு தொட்டியில் நீர் H உயரத்துக்கு நிற்கிறது. தொட்டியின் சுவரில் எந்த இடத்தில் ஒரு சிறு துளையிட்டால், அவன் வழியே வரும் நீர் தொட்டியின் அடிப்புறத்திலிருந்து மீப்பெரும் தொலைவில் விழும்?

(8) காற்றைப் பொறுத்து விமான மொன்றின் வேகத்தைக் காண விமான இறகில் ஒரு பிட்டோ குழாய் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. குழாயின் திரவம் ஆல்கஹால் (அடர்த்தி 0.8 கிராம்/க.செ.மீ) ஆகவும், திரவ மட்டங்களில் வேறுபாடு 12 செ.மீ. எனவும் இருந்தால், விமானத்தின் வேகத்தைக் கிலோ மீட்டர்/மணியில் கணக்கிடு.

(9) 10 செ.மீ. விட்டமுள்ள நீர் செல்லும் குழாயில் 6 செ.மீ. விட்டமுள்ள வெஞ்சுரி இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அழுத்த வேறுபாடு 8 செ.மீ. நீர் உயரமானால், நீரோட்ட வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

(10) 20 செ.மீ. விட்டமுள்ள ஒரு குழாயுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பிட்டோ குழாய் 5 செ.மீ. நீர் உயரம் அழுத்த வேறுபாட்டைக் காட்டுகிறது. குழாயின் வழியே நீர் செல்லும் வேகத்தையும், 1 நிமிடத்தில் பாயும் நீரின் அளவையும் கணக்கிடுக.

இணைப்பு 1: பௌதிக அளவுகளுக்கான **M. K. S** அலகுகளும், அவற்றின் பரிமாணங்களும் கீழே அட்டவணைப் படுத்தப் பட்டுள்ளன.

அளவு	அலகு	பரிமாணம்
அடர்த்தி	கிலோகிராம்/(மீட்டர்)^3	ML^{-3}
அதிர்வெண்	ஹெர்ட்ஸ்	T^{-1}
அலை நீளம்	மீட்டர்	
அலைவு நேரம்	செகண்டு	T
அழுத்தம்	நியூட்டன்/(மீட்டர்)^2	$ML^{-1}T^{2}$
ஆற்றல்	ஜூல்	$ML^{2}T^{2}$
இடப் பெயர்ச்சி	மீட்டர்	L
ஈர்ப்பழுத்தம்	ஜூல்/கிலோகிராம்	$L^{2}T^{-2}$
ஈர்ப்புச் செறிவு	நியூட்டன்/கிலோகிராம்	LT^{-2}
உந்தம்	கிலோகிராம்—மீட்டர்/செகண்டு	MLT^{-1}
காலம்	செகண்டு	T
கோண இடப்பெயர்ச்சி	ரேடியன்	—
கோண உந்தம்	கிலோகிராம்-(மீட்டர்)^2/ செகண்டு	$ML^{2}T^{-1}$
கோணத் திசைவேகம்	ரேடியன்/செகண்டு	T^{-1}
கோண முடுக்கம்	ரேடியன்/(செகண்டு)^2	T^{-2}
செயல், பணி	ஜூல்	$ML^{2}T^{-2}$
திசைவேகம்	மீட்டர்/செகண்டு	LT^{-1}
திருப்பு விசை	நியூட்டன்—மீட்டர்	$ML^{2}T^{-2}$
திறன்	வாட்	$ML^{2}T^{-3}$
நிலைமத் திருப்புத்திறன்	கிலோகிராம்—(மீட்டர்)^2	ML^{2}
நீளம்	மீட்டர்	L
நிறை	கிலோகிராம்	M
பரப்பு	(மீட்டர்)^2	L^{2}
பருமன்	(மீட்டர்)^3	L^{3}
முடுக்கம்	(மீட்டர்/(செகண்டு)^2	LT^{-2}
விசை	நியூட்டன்	MLT^{-2}

இணைப்பு 2: C. G. S, M. K. S ஆகிய அலகுகளின் தொடர்புகள்

அளவு	C. G. S அலகு	M. K. S அலகு	M.KS. அலகு / C G.S அலகு
நீளம்	செ.மீ.	மீட்டர்	10^2
நிறை	கிராம்	கிலோகிராம்	10^3
காலம்	செகண்டு	செகண்டு	1
பரப்பு	$(செ.மீ.)^2$	$(மீட்டர்)^2$	10^4
பருமன்	$(செ.மீ.)^3$	$(மீட்டர்)^3$	10
நிலைமத்திருப்புத் திறன்	கிராம்—$(செ.மீ.)^2$	கிலோ கிராம்—$(மீட்டர்)^2$	10^7
அடர்த்தி	கிராம்/$(செ.மீ.)^3$	கிலோகிராம்/$(மீட்டர்)^3$	10^{-3}
திசைவேகம்	செ.மீ/செகண்டு	மீட்டர்/செகண்டு	10^2
உந்தம்	கிராம்—செ.மீ/செகண்டு	கிலோகிராம்—மீட்டர்/செகண்டு	10^5
முடுக்கம்	செ மீ/$(செகண்டு)^2$	மீட்டர்/$(செகண்டு)^2$	10^2
விசை	டைன்	நியூட்டன்	10^5
அழுத்தம்	டைன்/$(செ.மீ)^2$	நியூட்டன்/$(மீட்டர்)^2$	10
ஆற்றல்	எர்க்	ஜூல்	10^7
செயல், பணி	எர்க்	ஜூல்	10^7
திறன்	எர்க்/செகண்டு	வாட்	10^7
கோண உந்தம்	கிராம்—$(செ.மீ)^2$/செகண்டு	கிலோகிராம்$(மீட்டர்)^2$/செகண்டு	10^7

இணைப்பு 3: நேர் கோட்டியக்கத்துக்கும், சுழற்சி இயக்கத்துக்கு முள்ள ஒப்புமை

நேர்கோட்டியக்கம்		சுழற்சி இயக்கம்	
இடப்பெயர்ச்சி	s	கோண இடப்பெயர்ச்சி	θ
திசைவேகம்	$v = \frac{ds}{dt}$	கோணத் திசைவேகம்	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
முடுக்கம்	$a = \frac{dv}{dt}$	கோண முடுக்கம்	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
நிறை	m	நிலைமத் திருப்புத்திறன்	I
விசை	$\mathrm{F} = ma$	திருப்பு விசை	$\mathrm{T} = \mathrm{I}\alpha$
பணி, செயல்	$\mathrm{w} = \int \mathrm{F} dx$	பணி, செயல்	$\mathrm{w} = \int \mathrm{T}\, d\theta$
இயக்க ஆற்றல்	$\frac{1}{2} mv^2$	இயக்க ஆற்றல்	$\frac{1}{2} \mathrm{I}\, \omega^2$
திறன்	$\mathrm{P} = \mathrm{F}v$	திறன்	$\mathrm{P} = \mathrm{T}\omega$
உந்தம்	mv	கோண உந்தம்	$\mathrm{I}\omega$

இணைப்பு 4: நிலைமத் திருப்புத்திறன்கள் - நிறை M

பொருள்	அச்சுக் கோடு	நிலைமத் திருப்புத்திறன்
வட்ட வளையம் ஆரம் R	தளத்துக்கு நேர்க்குத்தாக, மையப் புள்ளியின் வழியே செல்லும் கோடு	MR^2
,,	ஏதேனுமொரு விட்டம்	$\frac{MR^2}{2}$
வட்ட வளையம் உள் ஆரம் R_1 வெளி ஆரம் R_2	தளத்துக்கு நேர்க்குத்தாக, மையத்தின் வழியே செல்லும் கோடு	$\frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2}$
,,	ஏதேனுமொரு விட்டம்	$\frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{4}$
வட்டத் தட்டு ஆரம்	தளத்துக்கு நேர்க்குத்தாக, மையத்தின் வழியே செல்லும் கோடு	$\frac{MR^2}{2}$
,,	ஏதேனுமொரு விட்டம்	$\frac{MR^2}{4}$
உருளை ஆரம் R, நீளம் l	உருளையின் அச்சுக்கோடு	$\frac{MR^2}{2}$
,,	மையப் புள்ளி வழியே, உருளையின் அச்சுக் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்துக் கோடு	$M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$
உள்ளீடற்ற உருளை நீளம் l, உள் ஆரம் R_1 வெளி ஆரம் R_2	உருளையின் அச்சுக்கோடு	$\frac{M(R_1 + R_2^2)}{2}$
,,	மையப் புள்ளியின் வழியே, உருளையின் அச்சுக் கோட்டுக்கு நேர்க்குத்துக் கோடு	$M\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$
கோளத் திண்மம் ஆரம் R	ஏதேனுமொரு விட்டம்	$\frac{2}{5}MR^2$
,,	ஏதேனுமொரு தொடுகோடு	$\frac{7}{5}MR^2$
கோள ஓடு	ஏதேனுமொரு விட்டம்	$\frac{2}{3}MR^2$
,,	ஏதேனுமொரு தொடுகோடு	$\frac{5}{3}MR^2$
மெல்லிய கோல் நீளம் l	மையத்தின் வழியே செல்லும், நீளத்துக்கு நேர்க்குத்தான கோடு	$\frac{Ml^2}{12}$
,,	ஒரு முனை வழியே செல்லும், நீளத்துக்கு நேர்குத்தான கோடு	$\frac{Ml^2}{3}$

பொருள்	அச்சுக் கோடு	நிலைமத் திருப்புத்திறன்
செவ்வகத் தகடு நீளம் l, அகலம் b,	மையப்புள்ளி வழியே செல்லும், தளத்துக்கு நேர்க் குத்தான கோடு	$\frac{M(l^2 + b^2)}{12}$
கூம்பு உயரம் h அடிப்பக்க ஆரம் R	கூம்பின் அச்சுக் கோடு	$\frac{3}{10} MR^2$

இணைப்பு 5: புவியீர்ப்பு மையங்கள் (நிறை மையங்கள்)

பொருள்	புவியீர்ப்பு மையத்தின் இருப்பிடம்
முக்கோணம்	ஒரு முனையையும், எதிர்ப் பக்கத்தின் மையப் புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டின் மீது முனையிலிருந்து அக்கோட்டை 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி.
நான் முகத் திண்மம் (உயரம் h)	மேல் முனையையும், அடிப்பக்கத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் இணைக்கும் கோட்டில் மேல் முனையிலிருந்து $\frac{3h}{4}$ என்ற ஆழத்தில் உள்ள புள்ளி.
பட்டைக் கூம்பு (உயரம் h)	,,
கூம்பு (உயரம் h)	,,
வட்டவில் (மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $2a$, ஆரம் r)	சமச் சீரமைவுள்ள ஆரத்தில், வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{r \sin a}{a}$ என்ற தொலைவில் உள்ள புள்ளி.
வட்ட ஆரப்பகுதி (மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $2a$ ஆரம் r)	சமச்சீரமைவுள்ள ஆரத்தில், வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{2r \sin a}{3a}$ என்ற தொலைவில் உள்ள புள்ளி.
வட்டவில்பகுதி (மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $2a$ ஆரம் r)	சமச்சீரமைவுள்ள ஆரத்தில், வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{4r \sin^3 a}{3(2a - \sin 2a)}$ என்ற தொலைவில் புள்ளி.
அரைக் கோளத் திண்மம் (ஆரம் r)	சமச்சீரமைவுள்ள ஆரத்தில், வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{3}{8} r$ என்ற தொலைவில் உள்ள புள்ளி.
அரைக்கோள ஓடு (ஆரம் r)	சமச்சீரமைவுள்ள ஆரத்தில், வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{r}{2}$ என்ற தொலைவில் உள்ள புள்ளி

இணைப்பு 6.

விடைகள்

பகுதி (10)

1. $A + B + C = O$
2. $C = mA + nB$; m; n என்பவை ஸ்கேலார்கள்
3. $A = O$ அல்லது $B = O$ அல்லது, A -யும் B -யும் ஒன்றுக்கொன்று நேர்க்குத்தான வெக்டார்கள்
4. (i) -3 (ii) 6
5. $a = 3$

பகுதி (20)

4. O.
5. $a = 4; b = 2; c = -1$
6. 303
7. $-\frac{7}{6}$
8. $\frac{3}{2}$
9. $26\frac{2}{3}$

பகுதி (30)

3. $v_\rho = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi$

$a_\phi = -z\sin\phi - 2\rho\cos^2\phi$

$a_z = \rho\sin\phi$

7. l_r, l_θ, l_θ என்பன கோள ஆயங்களின் அலகு வெக்டார்களானால்,

$$v = \dot{r}\, e_r + r\dot{\theta}\, e_\theta + r\sin\theta\,\dot{\phi}\, e_\phi$$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)e_r + \left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\right\}e\theta + \left\{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi})\right\}e\,\phi$$

8. (i) $2\vec{k}$ (ii) $2\pi r^2$

பகுதி (40)

1. 746 வாட்
2. $a = Kr\omega^2$; K -மாறிலி

3. $n = \sqrt{\frac{T}{m}}$; K -மாறிலி
4. $E = KI\omega^2$; K -மாறிலி
5. $p = Khg\rho$; K -மாறிலி
6. மணிக்கு $3\sqrt{2}$ கிலோகிராம் வேகத்தில் செங்குத்துக் கோட்டுடன் 45° கோணத்தில்
7. $4\sqrt{3}$ நிமிடங்கள்.
8. 43.2 செகண்டுகளுக்குப் பின்னர்.
10. 5.04 மீட்டர்/செகண்டு
11. கிடைத்தளத்தில் 1 கிலோ மீட்டர் தொலைவில் செங்குத்துக் கோட்டுக்கு 4°19' கோணத்தில் 202.2 மீட்டர்/செகண்டு என்ற வேகத்தில் விழும்.
12. 5.16 மீட்டர்/செகண்டு
13. $u = 116$ மீட்டர்/செகண்டு; $a = 25°01'$
14. $a = 33°41'$; $v = 56.44$ மீட்டர்/செகண்டு $T = 6.384$ செகண்டு.
15. 2000 மீட்டர்; 6000 மீட்டர்.
16. 217.7 மீட்டர்.
17. 84 கிலோ மீட்டர்

பகுதி (50)

2. 100%
3. 15 கிலோ கிராம்—மீட்டர்/செகண்டு; 750 நியூட்டன்
4. 307 மீட்டர்/செகண்டு
5. B -யின் திசையிலிருந்து 116.5°
6. (i) 8×10^5 மீட்டர்/(செகண்டு)^2
   (ii) 4×10^4 நியூட்டன்
   (iii) 5×10^{-4} செகண்டு
   (iv) 20 நியூட்டன்—செகண்டு
7. (i) 0.1 கிலோ கிராம்
   (ii) 0.16 மீட்டர்/செகண்டு
8. (i) 0.16
   (ii) 240 ஜூல்
   (iii) 0.32 ஜூல்
9. 0.0184 மீட்டர்
10. 0.002334 மீட்டர்/(செகண்டு)^2
11. (i) 4 மீட்டர்/ (செகண்டு)^2
   4.9 மீட்டர் / (செகண்டு)^2
   (ii) 6.33 மீட்டர் / (செகண்டு)^2
   தொடுகோட்டுக்கு 39° 14' கோணத்தில்
   (iii) 1.248 நியூட்டன்

12. 22.17 மீட்டர் / செகண்டு
13. 2.7 நியூட்டன்
61.5 நியூட்டன்

பகுதி (60)

1. (i) 3.77 மீட்டர் / செகண்டு
94.7 மீட்டர் / $(\text{செகண்டு})^2$
(ii) 3.01 மீட்டர் / செகண்டு
56.8 மீட்டர் / $(\text{செகண்டு})^2$
(iii) 0.0368 செகண்டு
2. (i) 0.1697 மீட்டர்
(ii) 8.878×10^{-3} நியூட்டன் (—திசையில்)
(iii) $\frac{4}{3}$ செகண்டு
(iv) 0.3118 மீட்டர் / செகண்டு
3. (i) 31.42 செ.மீ / செகண்டு
(ii) 49.34 செ.மீ. / $(\text{செகண்டு})^2$
(iii) $\frac{1}{3}$ செகண்டு
(iv) 99.31 செ.மீ.
4. 6.2 செ.மீ.
5. 1.047 செகண்டு
6. 0.8971 செகண்டு
8. 0.5063 செகண்டு
9. 0.00075 கிலோ கிராம் - $(\text{மீட்டர்})^2$
10. (i) 0.57 கிலோ கிராம் - $(\text{மீட்டர்})^2$
0.48 கிலோ கிராம் - $(\text{மீட்டர்})^2$
11. 0.1525 கிலோ கிராம் - $(\text{மீட்டர்})^2$

பகுதி (70)

1. 0.175 ஜூல்
2. 500 கிலோ கிராம் - $(\text{மீட்டர்})^2$
9.868×10^5 ஜூல்
3. 0.2524 மீட்டர்
4. 1.098 செகண்டு
5. 99.19 செ.மீ.
6. 1.639 செகண்டு
ஒரு முனையிலிருந்து 0, 34.85, 65.15, 100 செ.மீ. தொலைவில் உள்ள நான்கு புள்ளிகளிலும் அலைவு நேரங்கள் சமமாயுள்ளன.

7. 4.82 செ.மீ.
8. A -யிலிருந்து 2.748 செ.மீ. தொலைவில்
9. 5.422 மீட்டர் / செகண்டு

பகுதி (80)

1. 3.758 ரேடியன் / செகண்டு
   8.16 ரேடியன் / செகண்டு
2. 5π ரேடியன் / செகண்டு
3. (i) $\frac{1}{2}MR^2\omega_o$; $\frac{1}{4}MR^2\omega_o^2$
   (ii) $\frac{1}{2}\frac{\omega_o^2 R^2}{g}$
   (iii) ω_o; $\left(\frac{M}{2}-m\right)R^2\omega_o$;
   $\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}-m\right)R^2\omega_o^2$
4. (i) 7.061×10^{33} கிலோ கிராம் -(மீட்டர்)^2 / செகண்டு
   (ii) 1.755×10^{29} கிலோ கிராம் -(மீட்டர்)^2 / செகண்டு
5. $\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$
   x -அச்சுக்கு 63° கோணத்தில் 1.12 மீட்டர்/(செகண்டு)^2
6. ....
7. புவி மையத்திலிருந்து இணைக்கும் கோட்டில் 4.906×10^6 கிலோ மீட்டர் தொலைவில்
8. கார்பன் அணுவிலிருந்து 6.46×10^{-11} மீட்டர்தொலைவில்.
9. $\frac{h^2 j(j+1)}{8\pi^2 I}$; இதில் $I=\mu r^2=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}r^2$

பகுதி (90)

1. 2 W tan θ ; W - ஒரு தண்டின் எடை
2. $\sqrt{T_o^2 - W^2}$
5. 4W
6. $\frac{Wb}{2a}\tan\theta$ [θ என்பது CA - க்கும் கிடைத்தளத்துக்கு மிடையே யுள்ள கோணம்]
9. $\frac{84W}{25}$ கிலோ கிராம்.

பகுதி (100)

1. கூம்பின் உயரம் : உருளையின் உயரம் $=\sqrt{6}:1$

2. r என்பது கோளத்தின் ஆரமானல், பொதுத்தளத்துக்கு மையப் புள்ளியின் வழியே வரையப்படும் நேர்க்குத்துக் கோட்டில், கோளத்தினுள், தளத்திலிருந்து $\frac{r}{6}$ என்ற தொலைவில்.
3. r வட்டவில்லின் ஆரமாகவும், $2a$ வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணமாகவும் இருந்தால், வட்ட மையத்திலிருந்து $\frac{r \sin a\,(1+\cos a)}{a + \sin a}$ என்ற தொலைவில்
4. பெரிய கூம்பின் உயரத்தில் மூன்றிலொரு பங்கு.
6. a சாய் கோணமானல் $\tan a = \frac{2r}{h}$
7. 120.
10. அச்சுக் கோட்டில் அகன்ற அடிப்பக்கத்திலிருந்து $\frac{33}{38}$ மீட்டர் தொலைவில்.
11. l-நீளமானல், தண்டின் மையப் புள்ளியிலிருந்து, ஆரத்தில் 0·0406 l என்ற தொலைவில்
12. சதுரத்தின் மையப் புள்ளியிலிருந்து $\frac{\sqrt{2}\,a}{21}$ என்ற தொலைவில், வெட்டப்பட்ட மூலை விட்டத்தில் உள்ளது.

பகுதி (110)

2. a, β என்பன சாய் கோணங்களானல்,
$\sin \beta = \sin a + \mu \cos a$
4. 0.134 a
7. $W \frac{(2\mu - \tan a)}{(\tan a - \mu)}$
11. $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$; $\frac{W}{3\sqrt{5}}$
12. $2\frac{11}{12}$ கிலோ கிராம் எடை; 0.086
16. $16° 26'$

பகுதி (120)

1. முக்கோணத்தின் உயரம் h ஆனல், திரவ மட்டத்திலிருந்து $\frac{h}{2}$ ஆழத்தில் உள்ள கோடு.
2. கதவின் அடி முனையிலிருந்து $\frac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}$ என்ற உயரத்தில் உள்ள புள்ளி.

5. 816.6 நியூட்டன்
6. 15.32 செ.மீ.
7. 1.09
8. 1.03
9. $\frac{5}{6}$
10. 1.196
12. 1.687 மீட்டர்
13. 2.149 மீட்டர்

பகுதி (130)

1. 1.685 கி. மீட்டர்
2. 1.251 கி மீட்டர்
3. 1.33 கி. மீட்டர்
4. 111 மீட்டர்
5. 1.595 கிலோ மீட்டர்

பகுதி (140)

1. 14 மீட்டர்/செகண்டு.
   0.00258 (மீட்டர்)^3/செகண்டு.
2. 14.69 மீட்டர்/செகண்டு.
3. 9800 கிலோ கிராம்/சதுர மீட்டர்
4. 66150 கிலோ கிராம்/(மீட்டர்)^3; 1-ல் உள்ளதை விட அதிகமாக இருக்கும்.
   0.2656 (மீட்டர்)^3 / செகண்டு
5. 4 மீட்டர் / செகண்டு
6. 4.109 மீட்டர் / செகண்டு
   20.545 மீட்டர் / செகண்டு
7. $\frac{H}{2}$ ஆழத்தில்
8. 137.4 கிலோ மீட்டர் / மணி
9. 0.003795 (மீட்டர்)^3 / செகண்டு.
10. 1.864 (மீட்டர்)^3 / நிமிடம்.

மேற்கோள் நூற்கள்

(BIBLIOGRAPHY)

Duncan and Starling—'Dynamics'
Duncan and Starling—'Statics'
Humphrey—'Dynamics'
Humphrey—'Statics'
Joos—'Theoretical Physics'
Keith R. Symon—'Mechanics (Addisn - Wesley)'
Lamb—'Dynamics'
Lamb—'Statics'
Loney—'Dynamics'
Loney—'Statics'
Loney—'Hydrostatics'
Mathur—'Properties of Matter'
Margeneau and Murthy—'Mathematics of [Physics and Chemistry]'
Narayanamurthy—'Dynamics'
Narayanamurthy—'Statics and Hydrostatics'
Page—'Introduction to [Theoretical Physics]'
Resnick and Halliday—'Physics for students of [Science and Engineering - Vol. I]'
Rutherford—'Classical Mechanics'
Rutherford—'Vector Methods'
Schaum Series—'Vector Analysis'
Sears and Zemansky—'College Physics' (Addison - Wesley)
Synge and Griffith—'Principles of Mechanics' (McGraw Hill)
Upadyaya J. C.—'General Properties of Matter' (Ramprasad and sons. Agra-8)
Weber, White and Manning—'College Technical Physics'
நாகராஜன்—'எந்திரவியல்'

கலைச்சொற்கள்

A

Absolute	—	சார்பிலா
Absorbent	—	உறிஞ்சி
Acceleration	—	முடுக்கம்
Acceleration due to gravity	—	புவியீர்ப்பு முடுக்கம்
Action	—	வினை, செயல்
Addition	—	கூட்டல்
Air resistance	—	காற்றின் தடை
Algebra	—	இயற் கணிதம்
Altitude	—	குத்துயரம்
Amplitude	—	வீச்சு
Angle of friction	—	உராய்வுக் கோணம்
Angle of inclimation	—	சாய் கோணம்
Angle of projection	—	எறி கோணம்
Angular acceleration	—	கோண முடுக்கம்
Angular momentum	—	கோண உந்தம்
Angular velocity	—	கோணத் திசைவேகம்
Auticlockwise	—	இடஞ் சுழி
Apeizon oil	—	அப்பீஸான் எண்ணெய்
Applications	—	வினை பயன்கள்
Arc of a circle	—	வட்ட வில்
Arithmatic progression	—	கூட்டுத் தொடர்
Arms	—	புயங்கள்
Associative property	—	சேர்க்கைப் பண்பு
Atomic particles	—	அணுத்துகள்கள்
Atomic physics	—	அணு பௌதிகம்
Atmospheric pressure	—	வளியழுத்தம்
Axls	—	அச்சுக் கோடு
Axle	—	அச்சு

B

Barometer	—	பாரமானி
Bar pendulum	—	சட்ட ஊசல்
Base point	—	அடிப்படைப் புள்ளி
Beam (balance)	—	தூலம் (தராசு)
Beaume's hydrometer	—	மேயூதிரப்வமானி

Bernoulli's equation — பெர்ஞேலி சமன்பாடு
Borda's method — போர்டா முறை
Boyle's law — பாயில் விதி
Bnoyancy — மிதவைத் திறம்

C

Capillary effect — நுண்புழை விளைவு
Cartesian co-ordinates — கார்டீசியன் ஆயங்கள்
Cenco hyvac pump — சென்கோ உயர் வெற்றிடப் பம்பு
Centre of buoyancy — மிதவைத் திறன் மையம்
Centre of gravity — புவியீர்ப்பு மையம்
Centre of mass — நிறை மையம்
Centre of oscillation — அலைவு மையம்
Centre of pressure — அழுத்த மையம்
Centre of suspension — தொங்கு மையம்
Centrifugal force — மைய விலக்கு விசை
Centripetal force — மைய நோக்கு விசை
Chord — நாண்
Circular motion — வட்ட இயக்கம்
Circumference — பரிதி
Clockwise — வலஞ் சுழி
Clutch — கிளட்சு
Co-efficient of friction — உராய்வு எண்
Co-efficient of restitution — நிலைமீட்பு எண்
Co-efficient of viscosity — பாகு நிலை எண்
Common balance — பொதுத் தராசு
Common hydrometer — பொதுத் திரவமானி
Commutative property — இடமாற்றப் பண்பு
Components — கூறுகள்
Compressible — இறுகு தன்மையுள்ள
Condensation pump — திரவமாக்கும் பம்பு
Condition — நிபந்தனை
Cone of friction — உராய்வுக் கூம்பு
Conservation of angular momentum — கோண உந்த அழிவின்மை
Conservation of energy — ஆற்றல் அழிவின்மை
Conservation of momentum — உந்த அழிவின்மை
Constraints — வரம்புகள்
Continuity — தொடர்ச்சி
Continuous — தொடர்ச்சியான
Contraction — சுருக்கம்

Co-ordinates	—	ஆயங்கள்
Coplanar forces	—	ஒரு தள விசைகள்
Couple	—	இரட்டை
Cross product	—	குறுக்குப் பெருக்கல்
Curl	—	கர்ல், சுழிவு
Curve	—	வளை கோடு
Curirlinear Co-ordinates	—	வளை கோட்டு ஆயங்கள்
Cyclic order	—	சுற்று வரிசை
Cylinder	—	உருளை
Cylindrical Co-ordinates	—	உருளை ஆயங்கள்

D

Deflection	—	விலக்கம்
Definition	—	வரையறை
Diameter	—	விட்டம்
Differential	—	பகுநி
Differentiate	—	பகுநியாக்கல்
Diffusion pump	—	விரவல் பம்பு
Dimension	—	பரிமாணம்
Direct impact	—	நேரடி மோதல்
Direction Cosine	—	திசைக் கொசைன்
Displacement	—	இடப் பெயர்ச்சி
Distribution of mass	—	நிறைப் பங்கீடு
Divergence	—	டைவ், விரிவு
Dot product	—	புள்ளிப் பெருக்கல்
Dynamics	—	இயக்கவியல்
Dyne	—	டைன்

E

Elastic	—	மீட்சியுறு
Elasticity	—	மீட்சித் தன்மை
Electric doublet or dipole	—	மின் இரட்டை
Electric field strength	—	மின் புல வலிமை
Electric potential	—	மின்னழுத்தம்
Electric power	—	மின் திறன்
Electro-magnetic energy	—	மின் காந்த ஆற்றல்
Element (Small)	—	சிறு பகுதி
Elementary particle	—	அடிப்படைத் துகள்
Ellipse	—	நீள் வட்டம்
Energy	—	ஆற்றல்

Equation of Continuity — தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு
Equilibrium — சமநிலை
Equipollence — சமன அமைவு
Equipollent System — சமனத் தொகுதி
Equivalent — இணை மாற்று
Euler's Equation — ஆய்லர் சமன்பாடு
Experimental Law — சோதனை விதி
Expression — கோவை
External forces — வெளி விசைகள்

F

False Balance — பொய்த் தராசு
Filter pump — வடி பம்பு
Flow — ஓட்டம்
Fluids — பாய் பொருட்கள்
Flywheel — விசையாட் சுழலி
Focus — குவியம்
Force — விசை
Force of limiting friction — வரம்பு உராய்வு விசை
Frequency — அதிர்வெண்
Friction — உராய்வு
Friction Clutch — உராய்வுக் கிளட்சு
Fulcrum — ஆதாரப்பள்ளி, திருப்பு முனை
Function — சார்பு

G

Gauss method — காஸ் முறை
Gauss theorem — காஸ் தேற்றம்
Geormetric progression — பெருக்கு தொடர்
Getters — வாயு நீக்கிகள்
Governor — கட்டுப்பாட்டமைவு
Gradient — கிராட், வாட்டம்
Gram — கிராம்
Gravitational force — ஈர்ப்பு விசை
Green's theorem — கிரீன் தேற்றம்
Gyroscope — ஜைராஸ் கோப்
Gyrostat — ஜைராஸ்டாட்

H

Harmonic progression — சீரிசைத் தொடர்
Hemisphere — அரைக் கோளம்

Huige — கீல்
Hodograph — ஹோடோ கிராஃப்
Hollow Cylinder — உள்ளீடற்ற உருளை
Hollow hemisphere — அரைக் கோள ஓடு
Hemogeneous atmosphere — ஓரியல் வளி மண்டலம்
Horizontal plane — கிடைத் தளம்
Horse power — குதிரைத் திறன்
Hour — மணி
Hydrodynamics — பாய்பொருள் இயக்கவியல்
Hydrometer — திரவமானி
Hydrostatics — பாய்பொருள் நிலையியல்

I

Impact — மோதல்
Impulse — கணத்தாக்கு
Impulsive force — தாக்கு விசை
Inclination — சாய்வு
Inlined plane — சாய் தளம்
Incompressible — இறுகாத் தன்மையுள்ள
Inclastic — மீட்சித் தன்மையற்ற
Infinitesimal — மீச்சிறு
Instant — கணம்
Integral — தொகுநி
Integrand — தொகை காண் உறுப்பு
Integration Constant — தொகுநி மாறிலி
Interacting bodies — இடைச் செயலுடைய பொருட்கள்
Interchangeable — பரிமாற்றப் பண்புள்ள
Internal Combustion engine — உள் எரி எஞ்சின்
Internal forces — உள் விசைகள்
Irregular — சீரற்ற
Irrotational — சுழற்சியற்ற

J

Jet — ஜெட்

K

Kilogram — கிலோகிராம்
Kilometre — கிலோ மீட்டர்
Kinetic energy — இயக்க ஆற்றல்
Knudsen gauge — நட்சன் அளவி

L

Lamina — தகடு
Laplacian operator — லாப்லாஸ் செயற் குறி
Latus rectum — நேரகலத் தொலைவு
Layers — படிவங்கள், அடுக்குகள்
Level Surface — சமனப் பரப்பு
Lift — மேலுந்து விசை
Limit — எல்லை, வரம்பு
Line integral — கோட்டுத் தொகுநி
Line of greatest slope — பெருமச் சரிவுக் கோடு
Line of Impact — மோதற் கோடு
Line of quickest descent — மீ விரைவு இறக்கக் கோடு
Liquid air — திரவக் காற்று

M

Mcgnituda — எண் மதிப்பு
Mathematical Introduction — கணிதவியல் அறிமுகம்
Maxinum height — பெரும உயரம்
Maxinum range — பெரும நெடுக்கம்
Maxinum value — பெரும மதிப்பு
Mcleod gauge — மக்லியாடு அளவி
Mean free path — சராசரி மோதலிடைத் தூரம்
Mean Solar day — சராசரிப் பரிதி நாள்
Machanics — எந்திரவியல்
Mercury pump — பாதரசப் பம்பு
Metacentre — மிதவைக் காப்பு மையம்
Metacentric height — மிதவைக் காப்புயரம்
Metre — மீட்டர்
Minimum value — சிறும மதிப்பு
Minute — நிமிடம்
Modulus of elasticity — மீட்சிக் குணகம்
Molecules — மூலக் கூறுகள்
Molecular pump — மூலக்கூறு பம்பு
Moment — திருப்புத்திறன்
Moment of intertia — நிலைமத் திருப்புத்திறன்
Momentum — உந்தம்
Motion — இயக்கம்

N

Negative — எதிர்
Necessary Condition — தேவையான நிபந்தனை

Newton — நியூட்டன்
Newtonian mechanics — நியூட்டன் எந்திரவியல்
Non-Steady — சீரற்ற
Non-Viscous — பாகுத்தன்மையற்ற
Normal — இயல்புக் கோடு
Normal accelebration — இயல்புக் கோட்டு முடுக்கம்
Normal reaction — இயல்புக் கோட்டு எதிர்வினை
Nuclear particles — அணுக்கருத் துகள்கள்
Nuclear physics — அணுக்கரு பௌதிகம்
Nutation — சுழலலைவு

O

Oblique impact — சாய்வு மோதல்
Occluded gas — மறைந்துள்ள வாயு
Opening — திறப்பு
Operator — செயலி
Orthogonal Co-ordinates — நேர்குத்து ஆயங்கள்
Outward normal — வெளி நோக்கிய இயல்புக் கோடு

P

Parabola — பர வளைவு
Parallel forces — இணை விசைகள்
Parallelopiped — இணை முகத்திண்மம்
Particle — துகள்
Path of a projectile — எறிதுகளின் பாதை
Period — அலைவு நேரம்
Periodic — சமகால அளவுள்ள
Perpendicular — நேர்குத்து
Pitot tube — பிட்டோ குழாய்
Plane of floatation — மிதப்புத் தளம்
Plane of projection — எறிதளம்
Platinum-iridium — பிளாட்டினம்-இரிடியம்
Plumb line — குண்டு நூல்
Point function — புள்ளிச் சார்பு
Point of oscillation — அலைவுப் புள்ளி
Point of Suspension — தொங்கு புள்ளி
Polar Co-ordinates — போலார் ஆயங்கள்
Polygon — பல கோணம்
Positive — நேர்
Potential energy — நிலையாற்றல்

Poundal — பவுண்டல்
Precession — அச்சுச் சுழற்சி
Pressure — அழுத்தம்
Principle — தத்துவம்
Projectile — எறி பொருள், எறிதுகள்
Projection (on a line etc) — வீழ்ச்சி
Pump — பம்பு

Q

Quantum Conditions — குவாண்டம் நிபந்தனைகள்
Quantum mechanics — குவாண்டம் எந்திரவியல்

R

Radial acceleration — ஆர முடுக்கம்
Radial Component — ஆரக் கூறு
Radian — ரேடியன்
Radius — ஆரம்
Radius of gyration — சுழற்சி ஆரம்
Range — நடுக்கம்
Rate — வீதம்
Reaction — எதிர்வினை
Real number — மெய்யெண்
Rectangular Co-ordinates — நேர்குத்து ஆயங்கள்
Reduced mass — சுருக்க நிறை
Reference line — சுட்டுக் கோடு
Reference point — சுட்டுப் புள்ளி
Regular — ஒழுங்கான, சீரான
Relative velocity — சார்புத் திசைவேகம்
Reservoir — தேக்கி
Resolution — பகுப்பு
Restoring Couple — மீட்பு இரட்டை
Resultant reaction — தொகுபயன் எதிர்வினை
Rigid bar — திண்கோல்
Rigid body — திண்பொருள்
Rocket — ராக்கெட்
Roll — உருள்தல்
Rotation — சுழற்சி
Rotational motion — சுழற்சி இயக்கம்
Rotary pump — சுழற்சி பம்பு
Rotor — சுழலும் உருளை

S

Scalar — ஸ்கேலார்
Scalarfield — ஸ்கேலார் புலம்
Scalar function of position — ஸ்கேலார் இடச் சார்பு
Scalar point function — ஸ்கேலார் புள்ளிச் சார்பு
Scalar product — ஸ்கேலார் பெருக்கல்
Second — செகண்டு
Sector — வட்ட (ஆர)ப் பகுதி
Segment — வட்டவில் பகுதி
Sensitiveness — உணர்வு நுட்பம்
Shaft — எந்திரத் தண்டு
Shape — வடிவம்
Similar triangles — ஒத்த முக்கோணங்கள்
Simple harmonic motion — சீரியல்பான இயக்கம்
Simple pendulum — தனி ஊசல்
Size — பருமன்
Sleeping top — உறங்கும் பம்பரம்
Slip — நழுவுதல்
Slip-rings — நழுவு வளையங்கள்
Slope — சரிவு
Smooth — வழவழப்பான, உராய்வற்ற
Solar system — ஞாயிற்றுக் குடும்பம்
Solid — திண்மம், திண்பொருள்
Solution — தீர்வு
Space — சூழல்
Speed — வேகம்
Sphere — கோளம்
Spherical Co-ordinates — கோள ஆயங்கள்
Spherical pendulum — கோள ஊசல்
Spherical Shell — கோள ஓடு
Spin — தற்சுழற்சி, சுழற்சி
Spindle — சுழல் மூளை
Spiral spring — சுருள் வில்
Sprengel's pump — ஸ்பிரெஞ்சல் பம்பு
Stability — நிலைப்பு, நிலைப்பாடு
Standard atmosphere — படித்தர வளியமுத்தம்
Standard unit — படித்தர அலகு
Statics — நிலையியல்
Stator — நிலையான உருளை
Steady flow — சீரான ஓட்டம்

Strain — திரிபு
Stream line — சீரோட்டவரி
Stream line motion — வரிச்சீரியக்கம்
Stress — தகைவு
Subtraction — கழித்தல்
Sufficient Condition — போதுமான நிபந்தனை
Surface integral — பரப்புத் தொகுப்பு
Surface of buoyancy — மிதவைத்திறப் பரப்பு
Symmetry — சமச் சீரமைவு

T

Tangent — தொடு கோடு
Tangential — தொடு கோட்டு
Tension — இழுவிசை
Tetrahedron (Solid) — நான்முகத் திண்மம்
Theorem — தேற்றம்
Thrust — அமுக்கம், உந்துவிசை
Time of flight — பறத்தல் காலம்
Toepler pump — டோப்ளர் பம்பு
Top — பம்பரம்
Topple — கவிழ்தல்
Toricelli's theorem — டாரி செல்லி தேற்றம்
Torque — திருப்பு விசை
Transformation of Co-ordinates — ஆயங்களின் மாற்றம்
Translational motion — நேர்ப்பெயர்ச்சி இயக்கம்
Transmissibility of force — விசையின் இடமாற்றப் பண்பு
Triangle — முக்கோணம்
Triple Product — மும்மைப் பெருக்கல்
Truth — உண்மை
Tube of flow — ஓட்டக் குழாய்
Turbulent motion — கொந்தளிப்பியக்கம்
Twaddel's hydrometer — ட்வாடெல் திரவமானி

U

Uniform aeceleration — சீரான முடுக்கம்
Uniform velocity — சீரான திசைவேகம்
Unitvector — அலகு வெக்டார்

V

Vacuum — வெற்றிடம்
Vector — வெக்டார்
Vector field — வெக்டார் புலம்
Vector function of position — வெக்டார் இடச்சார்பு
Vector point function — வெக்டார் புள்ளிச்சார்பு
Vector product — வெக்டார் பெருக்கல்
Velocity -- திசைவேகம்
Venturi meter — வெஞ்சுரி மீட்டர்
Venturi tube — வெஞ்சுரி குழாய்
Vertex — உச்சி, மேல் முனை
Vertical — செங்குத்தான
Vertical oscillations — செங்குத்து அலைவுகள்
Vertical plane — செங்குத்துத் தளம்
Vibration — அதிர்வு
Vibrational motion — அதிர்வியக்கம்
Virtual Work — மாயப் பணி
Viseous — பாகுத் தன்மையுள்ள
Volume — பருமன்
Volume integral — பருமத் தொகுப்பு

W

Waran's pump — வாரன் பம்பு
Work — பணி, வேலை
Work less Constraints — பணியிலா வரம்புகள்

Y

Yard — கஜம்

Z

Zero — சுழி